大学の物理教育 Vol. 31, No. 2, p. xx (2025) 著者最終稿

角度の次元とプランク定数

2025 年 6 月 11 日

北 野 正 雄　　大阪大学量子情報・量子生命研究センター/ 応用科学研究所 / 京都大学名誉教授

1　はじめに

天文, 測距などの分野で重要な角度を定量的に測るために, 古代からさまざまな道具や単位が用いられてきた．現在でも広く用いられている単位である度 (°, degree) はバビロニア起源といわれている．1 回転 (turn) を 360 (割りやすい数, 1 年のおよその日数) で分割した角の大きさである．メートル法制定時には grade (= turn/400) という単位も作られた [1]．

角度を円弧の長さ s と半径 R の比として定量する弧度法 (circular measure) は 18 世紀半ば, (公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ で有名な) オイラーによって導入された．国際単位系 SI も弧度法に依っており, 角度は無次元の組立単位 $\mathrm{rad} = \mathrm{m/m}\ (= 1)$ で表すことになっている [2]．弧度法の角度の定義 $\theta := s/R$ に対応している．しかし, 次元なしの角度の単位が曖昧な存在であることは否めない．$60\,\mathrm{rad/s}$ という表記に対して, $\mathrm{rad} = 1$ を代入すると, 周波数と角周波数のどちらを表しているか判断がつかなくなる [3]．

SI において角度の扱いは, 長年の悩みの種であり, ある時期 (1960～1995 年) には, ラジアン (ならびに立体角のステラジアン)　は「補助単位」という, 〈取り扱い注意〉の特別なクラスに分類されていた．現在は, 通常の組立単位と位置づけることで一応落ち着いてはいるが, 角度に独立の次元を与える (つまりラジアンを基本単位とする) 可能性について議論が繰り返されている [4, 5, 6]．

単位の統一という趣旨とは裏腹に, 次元を与えることで非 SI 単位を含む量の計算が正しく行えるようになる．たとえば, 速度について $1\,\mathrm{mile/h} = 1609\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s} = 0.447\,\mathrm{m/s}$ などと計算できるように, 角度に独立次元を与えることで, ラジアン以外の角度の単位が混在しても誤りなく計算が進められる．角度を含む「次元解析」も可能になる．

本稿では, もし仮に「角度」を新たな次元として追加する場合の留意点と物理公式への影響の例などを考える．特にプランク定数に注目して, 量子論の歴史との関連を含めて, 詳しく調べる．

物理量の単位を示すのに, $f \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{Hz}$ のような表記 (同値関係) が用いられる [7]．ここでは拡張単位系について, $\overset{\mathrm{SI+}}{\sim}$ という記号を使う．もちろん, 角度について, $\theta \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{rad} \neq 1$ である．

2　角度の独立次元化

半径 $R \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{m}$ の円の一部である円弧の長さ $s \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{m}$ と中心からそれを見込む角度 $\theta \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{rad}$ の一般的関係

$$s = \eta\theta R \tag{1}$$

に注目する．θ, R に関する複比例の式で, $\eta \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} 1/\mathrm{rad}$ はその比例定数である [6]．

この式により, たとえば全円周の長さを

$$\begin{aligned} s_0 &= (\pi/180^\circ)(360^\circ)R = (2\pi/\mathrm{turn})(1\,\mathrm{turn})R \\ &= (1/\mathrm{rad})(2\pi\,\mathrm{rad})R = \cdots = 2\pi R \end{aligned} \tag{2}$$

のように角度の単位によらず求めることができる．次元つき係数の変換則 $\eta = \pi/180^\circ = 2\pi/\mathrm{turn} = 1/\mathrm{rad} = \cdots$ が単位の違いを吸収している．これが角度に次元を与えることのメリットである．

単位系に独立次元を追加する場合, 当該次元を含む何らかの定数を追加する必要がある [7]．電磁気学を 3 元から 4 元化するために $\mu_0 \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{N/A^2}$ あるいは $e \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{A\,s}$ が導入された．このような一般則を踏まえれば, 角度に独立次元を与えるにあたって定数 $\eta \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{rad}^{-1}$ の導入は不可避である．

3　三角関数の微分公式

三角関数 (一般に非同次関数) の引数は無次元でなければならない．ξ が次元を持てば，展開 $\sin\xi = \xi - \xi^3/6 + \cdots$ が次元の異なる量の和になってしまうからである．角度 $\theta \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{rad}$ に関しては，$\sin\eta\theta$ のように無次元化したものを引数とする必要がある．そして，微分公式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\eta\theta = \eta\cos\eta\theta \quad \overset{\text{SI+}}{\sim} 1/\mathrm{rad} \tag{3}$$

となる． 正規化された角度 $\bar\theta := \eta\theta$ に対しては，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}\bar\theta)\sin\bar\theta = \cos\bar\theta$ である．

指数関数 $\exp \mathrm{i}\xi = \cos\xi + \mathrm{i}\sin\xi$ についても同様であり，複素振幅の正弦時間振動 $\exp(-\mathrm{i}\eta\omega t)$ の時間微分は以下のようになる;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(-\mathrm{i}\eta\omega t) = -\mathrm{i}\eta\omega\exp(-\mathrm{i}\eta\omega t) \tag{4}$$

ここでも $\bar\omega := \eta\omega$ とすれば，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\exp(-\mathrm{i}\bar\omega t) = -\mathrm{i}\bar\omega\exp(-\mathrm{i}\bar\omega t)$ と見慣れた式になる．

4　回転運動

質点 m (位置 $\boldsymbol{r}$) が軸 $\boldsymbol{u}$ (単位ベクトル) の周りを回転している場合を考える．式 (1) を 3 次元の無限小回転に適用した $\Delta\boldsymbol{s} = \eta(\Delta\theta\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{r}$ の両辺を Δt で割ることで，速度は $\boldsymbol{v} = \eta\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ であたえられる．$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{rad/s}$ は角速度ベクトルである．運動エネルギー $E = (m/2)\boldsymbol{v}^2$ に代入すると，

$$\frac{m}{2}(\eta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\eta\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

と変形され，並進運動のエネルギー $(1/2)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}$ と比較することで，角運動量 ($\boldsymbol{\omega}$ の共役量) の表式

$$\boldsymbol{L} := \eta\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = \eta\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/rad} \tag{6}$$

が得られる． 現行の単位系では，角運動量は $\bar{\boldsymbol{L}} := \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{J\,s}$ と定義され，運動量と位置の積である「作用 (action)」と同じ単位が付与されている． 異なった趣の物理量が次元的に縮退し区別できない．角運動量の時間変化であるトルクは $\boldsymbol{\tau} := \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \eta\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{J/rad}$ となり，「角度あたりの仕事」という分かりやすい次元を持つようになる．

5　調和振動

回転運動に類似の調和振動の運動方程式は

$$\dot p = -kx, \quad \dot x = p/m \tag{7}$$

である．x と p は変位と運動量を，‘$\dot{\ }$’ は時間微分を表す．また，$k \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{N/m}$ はバネ定数，$m \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{kg}$ は質量である．振動系のインピーダンス $\zeta := \sqrt{km} \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/m}$ を導入し，(相空間の面積を保つ) 正準変換 $P = p/\sqrt{\zeta}$, $X = \sqrt{\zeta}x$ を行うと，$\dot P = -\bar\omega X$, $\dot X = \bar\omega P$ となる．$\bar\omega := \sqrt{k/m} \overset{\text{SI+}}{\sim} 1/\mathrm{s}$ は，角速度 ω とは次元が異なり，周波数 f とは大きさが異なる．

さらに，複素変数 $a := (X + \mathrm{i}P)/\sqrt{2} \overset{\text{SI+}}{\sim} \sqrt{\mathrm{J\,s}}$ を導入すると，運動方程式は $\dot a = -\mathrm{i}\bar\omega a$ となり，その解は $a(t) = a(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar\omega t}$ である．

解析力学で「作用・角変数」とよばれている変数対 $I := a^*a \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s}$, $\bar\theta := -\arg a \overset{\text{SI+}}{\sim} 1$ (この角変数は無次元) を導入すると，ハミルトニアンは $H = (\bar\omega/2)(X^2 + P^2) = \bar\omega a^* a = \bar\omega I$, 正準方程式は

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial\bar\theta} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\bar\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -\bar\omega \tag{8}$$

となる．解は $I(t) = I(0)$, $\bar\theta(t) = -\bar\omega t + \bar\theta(0)$ であり，$a(t)$ の運動を再現する．振動の時間周期 $T \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{s}$ は $\bar\omega T = 2\pi$ ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}$ の周期) を満たすので，その逆数である周波数は $f = \bar\omega/(2\pi)$ で与えられる [8, 9]．

あえて，別の正準変数対として，角運動量 $L := I\eta \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/rad}$ と次元付き角度 $\theta := \bar\theta/\eta \overset{\text{SI+}}{\sim} \mathrm{rad}$ を導入することも可能ではある．回転運動との対応がよくなり，$\bar\theta, \bar\omega$ といった変数も不要となる．とはいえ，元の運動方程式 (7) は変数消去すれば，$\ddot x = -\bar\omega^2 x$ であり，回転との関係が薄く，抽象的な相空間に無理に角度次元を導入していることになる．

回転や振動に関して 3 種類の時間変化の変数

$$2\pi f = \bar\omega = \eta\omega \tag{9}$$

を考えうることが分かった. 角度に関係しない $\bar{\omega}$ と f は大きさが 2π 異なっている. ω だけが角度を含んでいる. 角度が無次元なら, $\bar{\omega}$ と ω は縮退する.

6 量子化とプランク定数

1900 年, プランクは黒体からの輻射スペクトルの問題を解決するために, 光がエネルギー $E = hf$ をもつ塊として振る舞うと仮定した. f は光の周波数, $h \sim 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ はプランク定数とよばれることになる定数であり,「作用」の次元を持つ. 光電効果でその存在が確認され, 光量子と名付けられた. その後, さまざまの現象に, この定数が関与していることが明らかになった. コンプトン効果において, 波長 λ の光が運動量 $p = h/\lambda$ をもった粒子と考えうることが示唆された. また, ド・ブロイは電子などの物質粒子が $\lambda = h/p$ の波長を持つ波として振る舞うことに気づいた.

水素原子の古典モデルから, 発光スペクトルを説明するために, ボーア・ゾンマーフェルトの量子条件 (1913 年, 1916 年) が考えだされた;

$$S := \oint_C p\,\mathrm{d}q = nh \quad \overset{\mathrm{SI+}}{\sim}\ \mathrm{J\,s} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

q は座標, p は対応する運動量, S は相平面で周期閉軌道 C が囲む面積である. この式は他の正準変数対についても成り立つ.

光はマクスウェル方程式から導かれる古典的な調和振動子で表される. 前節で見たように, 作用は (X, P)-平面の円軌道の内部の面積であることから, 量子条件 (10) は

$$S = 2\pi I = 2\pi E/\bar{\omega} = nh \tag{11}$$

となる. ただし, $E = \bar{\omega} I$ はエネルギーである. これより光のエネルギーが, $E = nhf$ と量子化されることが確認される.

中心力下の運動における角度の自由度に対して, 正準変数対 (L, θ) を導入する. 角運動量 $L \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/rad}$ が一定なので, 作用は

$$S = \int_0^{2\pi} L\,\mathrm{d}\theta = (2\pi\,\mathrm{rad})L = \frac{2\pi L}{\eta} = nh \tag{12}$$

と書け [10], 角運動量が $L = n\breve{h}$ と量子化される. 角運動量の量子化の単位は $\breve{h} := \eta h/(2\pi) \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/rad}$ である. 円運動の場合, 式 (6) を代入すると $p = nh/(2\pi r)$ となる (ド・ブロイの条件).

ディラックはハイゼンベルクの行列 (後に演算子) の時間発展が反対称積 $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ を用いて表されることに気づいた [11]. さらに, その古典極限

$$\frac{2\pi}{\mathrm{i}h}[\hat{A}, \hat{B}] \overset{\mathrm{cl}}{\to} \{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q} \tag{13}$$

が解析力学のポアソン括弧式 $\{A, B\}$ になることを, 対応原理とボーア・ゾンマーフェルトの条件 (10) を用いて示した. ここで, 因子 h はポアソン括弧式の微分の分母が担う qp (作用) の次元と符合している.

その後, 彼は教科書 [12] において, h に代わって $\hbar = h/(2\pi) \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s}$ を導入した. ディラック定数ともよばれる. (先の角運動量の量子化単位 $\breve{h} \overset{\mathrm{SI+}}{\sim} \mathrm{J\,s/rad}$ とは異なる次元をもつ.)

古典力学における正準座標の条件 $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ (i, j は自由度) に対応する演算子の条件は

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \tag{14}$$

と書ける. これは位置表示の演算子 $\hat{q}_i = q_i$, $\hat{p}_j = (\hbar/\mathrm{i})\partial/\partial x_j$ (後出) を代入すれば, 微分のチェーン則から直ちに分かる.「正準量子化」とよばれる手続きで, 量子条件の一般形である. 左辺には回転の要素はないので, $\breve{h}$ ではなく, $\hbar$ が適切である.

量子論の初期, アインシュタインの式やド・ブロイの式は一般的な変数である周波数や波長を用いて, $E = hf$, $p = h/\lambda$ と書かれ, プランク定数 h もそれに応じて定義された. その後, 演算子法の影響などで, (2π が表に出にくい) 角周波数と波数の使用が一般化し, $E = \hbar\omega$, $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ と書かれることが多くなった. しかし, 角度に次元を与えると, 右辺だけが rad を含むようになり, 次元の不整合を生ずる. 本

来, $\bar{\omega}=\eta\omega$, $\bar{\boldsymbol{k}}:=\eta\boldsymbol{k}$ を用いて, $E=\hbar\bar{\omega}$, $\boldsymbol{p}=\hbar\bar{\boldsymbol{k}}$ と書かれるべき式である.

平面波の位相 $\bar{\theta}\overset{\text{SI+}}{\sim}1$ にこれらを代入すると,

$$\bar{\theta}=-\bar{\omega}t+\bar{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{x}=\hbar(-Et+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})=\hbar S \qquad (15)$$

となり, 古典量子対応から波動関数 (平面波) は $\psi(t,\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\theta}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}$ と表せる. この微分 $\partial\psi/\partial t=-\mathrm{i}(E/\hbar)\psi$, $\boldsymbol{\nabla}\psi=\mathrm{i}(\boldsymbol{p}/\hbar)\psi$ から, 量子的な波動方程式を作るための対応規則 $E\to\mathrm{i}\hbar\partial/\partial t$, $\boldsymbol{p}\to(\hbar/\mathrm{i})\boldsymbol{\nabla}$ が得られる. 古典的な関係式 $E=p^2/(2m)+V(\boldsymbol{x})$ にこれらを適用することで, $\hbar$ を用いてシュレディンガー方程式が表される;

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{x})\right]\psi \qquad (16)$$

角度に次元を持たせる立場では, プランク定数には 3 つのバリエーションが考えうる;

$$h/(2\pi)=\hbar=\breve{h}/\eta \qquad (17)$$

式 (9) に対応して $hf=\hbar\bar{\omega}=\breve{h}\omega\quad(=E)$ が成り立つ. h と $\hbar$ は角度の次元は含まず, 大きさが 2π 異なる. $\breve{h}$ は角運動量の量子化単位である.

7　おわりに

角度の次元化について, 何をわざわざ面倒な議論をするのかと思われた方が多いだろう. それは, 本稿の読者が弧度法にすっかり馴染んでいるからである. とはいっても, 日常生活では「ラジアン」ではなく, 世の多くの人々と同じく,「度」を用いていることを思い出してほしい. 実際, 分度器のラジアン版を探し求めたり, 地軸の傾きをラジアンで言ったりはしない. この角度に関する「言文不一致」の状況は認識されるべきである. 角度の次元化によって, 口語である〈度〉を用いても, 文語である〈物理方程式〉が書けるようになることがポイントである.

変数の使い分けや因子 η の扱いが煩雑であることは否めず, 常用するメリットはないかも知れないが, 本稿で例示したような, 次元数変化の机上訓練としての有用性は認められる. 作用と角運動量, 速度と角速度などを同一次元で眺めていることに気づいたり, 正準量子化の意味を考え直すきっかけになる. もっと一般に, 電磁気を 3 元, 4 元単位系で扱う場合の本質的差異に気づいたり, $\hbar=1$, $h=1$ などとプランク定数を消し去る軽挙を反省する機会としては意義があるだろう. また, 中等教育における「度数法」から「弧度法」への移行に関する理論的裏打ちにもなる.

参考文献と注

1) ブルバキ (著), 笠原皓司, 清水達夫 (訳)『数学原論 位相 3』(東京図書, 1968) 第 5 章

2) BIPM; 産総研 計量標準総合センター (訳) 『国際単位系（SI）第 9 版（2019）日本語版』(産総研, 2020); オンライン版もある. 組立単位は 2.3.4 項, 歴史は付録 1.

3) 周波数 (頻度, 時間あたりの回数) と角速度 (時間あたりの角度) は異なった概念である. 前者の組立単位は Hz = 1/s. 矩形波や心拍のように角度が関係しない文脈で使われる.

4) K.R. Brownstein "Angles — Let's treat them squarely," Am. J. Phys. **65**, 605 (1997).

5) P.J. Mohr and W.D. Phillips "Dimensionless units in the SI," Metrologia **52**, 40 (2015). η-因子の導入を避けて, 簡易な方法で角度に次元を与え, 単位系の一貫性を実現しようと試みているが無理が多い.

6) P. Quincey "Angles in the SI: a detailed proposal for solving the problem" Metrologia **58** 053002 (2021); プレプリント arXiv:2108.05704.

7) 佐藤文隆, 北野正雄『新 SI 単位と電磁気学』(岩波書店, 2018).

8) R.P. ファインマン (著), 大貫昌子, 江沢 洋 (訳)『聞かせてよファインマンさん』(岩波書店, 2009) p. 210. ラジオ少年だった彼は LC 回路の共振周波数 $f=(2\pi\sqrt{LC})^{-1}$ を見て, どこに円があるのと随分悩んだそうである.

9) 三角関数の周期は 2π である. 周期を 1 にするためには, $\sin_1(\xi):=\sin(2\pi\xi)$ などを定義すればよい. しかし, 微分公式が $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi)\sin_1(\xi)=2\pi\cos_1(\xi)$ となる. 純幾何学的な因子である 2π を消し去ることはできない.

10) 朝永振一郎『量子力学 I』(第 2 版) (みすず書房, 1969) 19–20 節. (II 巻を含め h で一貫している.)

11) P.A.M. Dirac "The fundamental equations of quantum mechanics," Proc. Roy. Soc. A **109**, 642 (1925).

12) P.A.M. Dirac "The Principles of Quantum Mechanics, 1st ed." (The Clarendon Press, 1930).

連絡先 E-mail: kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp