SI における電流の単位の大きさについて

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2011 年 4 月 20 日

1 単位系と次元

単位系は単に「単位の集まり」といった程度の捉え方をされることが多いが, 実際にはそれ以上の重要な意味を担っている.

1. 基本的次元の選定
長さや時間といった少数の種類の物理量を基本的なものとして選定し, 他の種類の物理量をこれらの組み合わせ（積や商）によって表現するルールを決めることが単位系の役割である. これらのルールは物理法則を表す式と整合するように, 定められる. 電磁気的な場面に限ると, SI では, 長さ (L), 質量 (M), 時間 (T), 電流 (I) の 4 つを, CGS 単位系では L, M, T の 3 つを基本的次元としているので, それぞれ, 4 元単位系, 3 元単位系とも呼ばれる.

2. 各次元に対応する単位の大きさの定義
基本次元に対応する物理量を定量的に計るためには, 基準となる大きさ, すなわち単位が定義されなければならない. SI の前身である MKSA 単位系では当初, メートル原器, キログラム原器, 地球の自転周期がそれぞれ, 長さ, 質量, 時間の単位の定義に用いられた. 現在では, 時間の単位はセシウム原子時計を基準に定義されている. また, 長さは光の速度を m/s で表した場合の数値を定義値とすることで, 間接的に定義されている. 基本次元以外の物理量の単位の大きさは先のルールにしたがって自動的に決まる. その際, 係数が 1 になることが重要視される. これを単位系の一貫性 (consistency) という.

単位系の最も基本的な性格は 1. によって特徴づけられる. 2. は定量的な問題であって, 1. に比べると本質的でない. 実際, SI においても, 単位 (の大きさ) の定義は時代とともに変化してきている. 本稿で問題にしている, 真空の透磁率の数値 $4\pi \times 10^{-7}$ も, 単位系におけるこの第二義的な問題に属する.

SI の電流の単位 (アンペア) の大きさの起源には, CGS emu (電磁単位系) における電流の単位が関係している. このように複数の単位系を同時に扱う場合, 注意を払うべきことがある. 単位系が変わると, 同じ量でも異なった次元を持つ物理量で表される. たとえば, 電流は SI では独立した次元 I で表されるが, CGS emu では, $\mathsf{M}^{1/2}\mathsf{L}^{1/2}\mathsf{T}^{-1}$ のように力学的な次元の組み合わせで表される. $I = 1\,\mathrm{A}$ と $\acute{I} = 10^9\sqrt{\mathrm{dyn}}$ は同じ大きさの電流を表しているが, $I = \acute{I}$ と書くことはできない[1].

CGS 単位系の基本的次元はいずれも SI の基本的次元に含まれているので, 1. に関していえば, CGS 単位系における物理量は SI における量として, そのまま書き表せる. ここではすべて, 4 元単位系である SI による表記をとることにする. ただし, 電流の単位 (アンペア) の大きさはまだ決まっていないフリをする. 記号 $\overset{\mathrm{D}}{\sim}$ は 4 元系において次元が等しいことを表す.

2 電流の単位の決めかた

電流の単位の大きさを定めることを考えよう. CGS emu や現状の SI においては, 電流の間に働く力を利用している.

距離 d だけ隔てて平行におかれた電線 1, 2 の電流をそれぞれ, I_1, I_2 とおく. 電線 2 の長さ l の部分に働く力を F は比例係数を k として,

$$F = k\frac{l}{d}I_1 I_2 \tag{1}$$

と表せる. この比例関係は一般的なものであり, 電流の次元の選び方や単位の大きさの選び方の違いは k の次元とその値の違いとして吸収できる. 2 つの代表的な方法を見ておく.

[1] 同じ電流なのだから, 等号で結べばよいではないかという声が聞こえてきそうである. しかし, この等式は $1\,\mathrm{A}^2 = 10^{18}\mathrm{dyn}$ であり, SI の立場では, $1\,\mathrm{A} = 10^{13}\,\mathrm{N}$ という意味のない関係式になってしまう. また, CGS emu の立場では, アンペアというそこでは使い道のない単位を定義していることになる. 付録を参照のこと.

2.1　方法 1 — 4 元系

電線 1 の電流が, 電線 1 の位置につくる磁場の強さを

$$H = \frac{I_1}{2\pi d} \tag{2}$$

とおく．ここで, $2\pi d$ は電線 1 を中心にした半径 d の円周の長さに対応する．2π を除いて係数が 1 になるように磁場の強さ $H \stackrel{\mathrm{D}}{\sim} \mathrm{A/m}$ を定義している．

一方, 電線 2 の電流の長さ l の部分が受ける力を

$$F = I_2 l B \tag{3}$$

と表す．これは力から磁場（磁束密度）$B \stackrel{\mathrm{D}}{\sim} \mathrm{N/A \cdot m}$ を定義していることに対応している．

これらの式を比較することで, 2 種類の場 H, B は

$$B = 2\pi k H \tag{4}$$

のように関係づけられることが分かる．

k の次元は f/I^2 のそれに等しい. (すなわち, $k \stackrel{\mathrm{D}}{\sim} \mathrm{N/A^2}$ で計られる量である.) この方法では, 電流の単位の大きさは自由に決めることができる．

比例係数 k は実験によって定めることになる．まず, 適当な方法（電流標準）を用いて 1 A の大きさを定義する．そして, 1 m 隔てて置かれた平行する 2 つの導体それぞれに 1 A の電流を流し, 一方の導体 1 m に働く力を測定することで, 式 (1) から, k を定めることができる．通常, $2\pi k =: \mu_0$ と書かれ, 真空の透磁率, あるいは磁気定数と呼ばれる．

2.2　方法 2 — 3 元系

式 (1) そのものを簡単化することを考える. 比例係数が無次元かつ簡単な数になることを目標にしよう．電流に対して

$$\acute{I} = \sqrt{\frac{k}{2}} I \tag{5}$$

のような変数を導入すると,

$$F = 2\frac{l}{d}\acute{I}_1\acute{I}_2 \tag{6}$$

のように簡単化できる[2]．新たな電流 $\acute{I}$ の次元は $\sqrt{f}$ (力の平方根) のそれに等しい．

この方法では, 式 (6) が電流の単位の大きさを決めてしまっており, もはや選択の自由度はない．たとえば, CGS emu においては,

[2]因子 2 はビオ・サバールの法則の係数を 1 にするためのものである．SI のような有理単位系では, マクスウェル方程式の源項 ϱ, $\boldsymbol{J}$ に係数がつかないが, 源が点, 線, 面であることに対応して, 場に $1/4\pi$, $1/2\pi$, $1/2$ という因子が表れる．CGS 単位系のような非有理単位系では, 点源の場合を重視して, 源項に先回りして係数 $1/4\pi$ をつけているので, 場の係数はそれぞれ 1, 2 2π となる．

> 電流の単位 emu は，真空中に 1 cm の間隔で平行に配置された無限に長い二本の直線状導体のそれぞれを流れ，これらの導体の長さ 1 cm につき 2 dyn の力を及ぼし合う一定の電流のことである．

ということになる[3]．ただし, dyn$(= \mathrm{g \cdot cm/s^2} = 10^{-5}\,\mathrm{N})$ (ダイン) は力の単位である．

2.3　比較

3 元系は μ_0 という余分に思われる係数が表れず, 表面上は簡単である．しかし, 4 元系は電流が持つ 2 面性, すなわち「磁場をつくる」,「磁場から力をうける」に忠実であり, それぞれに対応する場 H, B も自然に導入される．その意味では, 3 元系はこのような 2 面性, あるいは場の存在そのものを軽視しているともいえる. 4 元系は近接相互作用, 3 元系は遠隔相互作用の考え方に対応しているともいえる．いうまでもなく, 前者の方がモダンな考え方である．

3 元系では電流の単位の大きさは力学的な手段で定義する他はない．実際, $\sqrt{\mathrm{dyn}}$ という力学的単位で表現される．このような方法は歴史上, 絶対単位と呼ばれるものであるが, 電磁気が未成熟で, すでに確立されていた力学的世界の付加的要素に過ぎなかった時代の名残である．

3　SI における電流の単位の大きさ

SI は電磁気の部分に関しては 4 元単位系であるので, 電流の単位の大きさは適切な電流標準器を用いて定義すればよい．しかし, 歴史的経緯から, 現行のアンペアの定義においては, 3 元単位系における電流の力学的定義を引き継ぐことになっている．

現行の定義を定める時点では, 標準電池や標準抵抗によって単位の大きさを決めていたいわゆる実用単位において, 絶対単位である CGS 単位系が援用されていた．すなわち, 実用単位系において, 1 A を 0.1 emu に相当する電流であると定められていた．この絶対化されて実用単位であるアンペアが踏襲されたのである．つまり, SI においては,

> 電流の単位 A は，真空中に 1 m の間隔で平行に配置された無限に長い二本の直線状導体のそれぞれを流れ，これらの導体の長さ 1 m につき $(0.01 \times 2\,\mathrm{dyn} =)\ 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}$ の力を及ぼし合う一定の電流である．

[3]間隔と長さが 1 cm であることに意味はなく, 等しければよいだけである．

と電流の単位の大きさを定義することになったのである．

SI は 4 元系であり, 電流の単位の大きさの定義に関しては, 力学的なものに依拠せずに独立に決定することが許されている．にも拘らず, 3 元系である GCS emu における定義を継承することになったため, 定義自身が奇異なものになっているのである．

$\acute{I} = \sqrt{k/2}I$ であることを考慮して, 1 A と 0.1 emu の等価性を式で表すと,

$$1\,\mathrm{A} = 0.1 \times \sqrt{\frac{2}{k}} \times 1\,\mathrm{emu} \tag{7}$$

である．これより,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 2\pi k = 2\pi \times 2 \times 10^{-2} \times \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{A}^2} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．これが, 現在の SI における μ_0 の定義値である．この値は過去との整合性を配慮して定められたものであり, 起源の異なるいくつかの因子からなっている．

当初, 電磁気的な単位の大きさは, 指定された方法で作成された電池の起電力や水銀の抵抗など, 再現性の乏しい手段で定められていた．そこで, より再現性の高い, 力学的手段, すなわち力でこれらを定めることが考案された．そして, 絶対単位という優位性を示す名称で呼ばれていた．しかし, 時代が下ると, 質量や力の測定精度が他の物理量の測定精度に比べて見劣りするようになってきた．電磁気では, クロスキャパシタ法という, コンデンサを用いた ϵ_0 の高精度の決定法が考案され, 力を介さずに抵抗（インピーダンス）が決定されるようになった．さらに, 近年になると, 交流ジョゼフソン効果, 量子ホール効果を利用した電圧と抵抗の再現性のよい実現が見出されたため, 力による電流の大きさの定義は時代遅れのものになっている．このような経緯から, いずれは, 電流の単位の大きさは力によらない方法で定義されるようになることは確実である．

4　コメント

以上の混み合った事情を考慮すると, 少なくとも電磁気学を最初に学ぶ人は, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ の由来にあまり心を悩ませない方がよいことが分かる．近い将来, μ_0 は実測によって定められる通常の物理量に戻る可能性が高いからである．

一方, 電磁気を教える立場にある人は, 歴史的経緯を把握しておくべきであろう．また, μ_0 の定義の不自然さをあげつらって, SI が欠陥単位系であると喧伝するむきも多いが, この経緯を理解していれば, そのような結論には至らないはずである．電磁気を素直な気持ちで学ぼうとする人々を混乱に陥れたり, 根拠のない, CGS ガウス単位系の優位性を示唆することで, 初学者を袋小路に誘うのはやめていただきたい．

付録

1 つの単位系から別の単位系に乗り移るのは意外に面倒な作業である．式の形そのものが変化することもあるので注意が必要である．まず, SI (3 元系) から CGS emu (4 元系) への移動の操作を $\mathcal{T}_{43}$ と書くことにする．先の対応は $\acute{I} = \mathcal{T}_{43}\, I\ (= \sqrt{\mu_0/4\pi}I)$ と書くべき式である．具体的な量に関しては, $\mathcal{T}_{43}\,\mathrm{m} = 10^2\,\mathrm{cm}$, $\mathcal{T}_{43}\,\mathrm{kg} = 10^3\,\mathrm{g}$, $\mathcal{T}_{43}\,\mathrm{s} = \mathrm{s}$, $\mathcal{T}_{43}\,\mathrm{A} = 10^{-1}\sqrt{\mathrm{dyn}} = 10^{-1}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}$ という変換を与える．一般の量については, $\mathcal{T}_{43}\,\mathrm{m}^{\alpha}\mathrm{kg}^{\beta}\mathrm{s}^{\gamma}\mathrm{A}^{\delta} = 10^{2\alpha+3\beta-2\delta}\mathrm{cm}^{\alpha+\delta/2}\mathrm{g}^{\beta+\delta/2}\mathrm{s}^{\gamma-\delta}$ である．$\mathcal{T}_{43}$ は非可逆な操作であり, $\mathcal{T}_{43}{}^{-1}$ は定義できない．つまり, CGS emu から SI への変換はないということである．