まえがき

大学での力学は初年次の冒頭で教えられることを想定して, その内容は初歩的なものに限定される傾向にある. 高校までのレベルの力学を, 微分方程式で再定式化することに留まることが多い. 次の段階といえば, 解析力学という抽象度の高い科目に進む以外の選択肢はない状況である. そこでは, ラグランジアン, 変分法, ハミルトニアン, 正準形式などが導入される. 形式的な美しさはあるものの, その本質的理解は必ずしも容易ではなく, 技芸の習得のみに終わるおそれがある. また, その適用範囲は保存系に限られており, 摩擦力や粘性力のような散逸のある系には適用できない.

こういった状況を踏まえ, 本書は初等的な力学から始めて解析力学の入口に至る中間的なレベルの力学を目指している. 通常の教科書に比べ, 多少むずかしい面もあるが, 天下り的に公式や解法をあたえるのではなく, 各概念の必然性や他分野との関連性をていねいに説明した. 手を動かしながら読んでもらえば, 初学者でも十分理解できるよう工夫したつもりである. また, ひと通り物理を学んだ人にとっては, 物理の出発地点である力学の各分野へのさまざまな影響を感じ取っていただけると思う. さらに, 力学を教える立場の方々にも, 興味のある素材を拾って教材として役立てていただけると期待している.

以下, 本書の特徴を簡単に紹介したい. 力学の出発点であるニュートンのプリンキピアについては, 有名な 3 法則を引用することで済まされることが多いが, その前後に書かれている定義や系についても注目し, 各法則の意味をより深く吟味した. また, 力学が確立される過程で重要な役割を演じたいくつかの歴史的実験 (ニュートン自身によるものも含む) に触れることで, 発展の各段階での問題意識を知る手がかりとした. さらに, 教育上有用と思われるデモ実験についても言及した.

解析力学に接続するために, 多粒子に対するニュートンの運動方程式から出発して, 一般化座標における運動方程式を導出した. これは一般に変分原理から導出されるラグランジュ方程式に相当するものである. 座標変換に際しては, 速度と運動量の双対構造を意識した. 通常, 両者はベクトルとして扱われるが,

前者は接ベクトル, 後者は余接コベクトルと区別されるべきものである．この双対関係を意識することで, 力学の構造が明確化される．

非慣性基準系に現れる慣性力は, 重要な概念である．地球という回転加速基準系に住むわれわれも, 遠心力やコリオリ力などが生む効果を体感している．慣性力は, 慣性という性質そのものや, 曲線座標系におけるみかけの力と混同されることが多い．混乱や矛盾を招来しがちであるため, その意義が過小評価されたり, 慣性力は使わないという極端な流儀さえあるが, これらは非慣性基準系の力学の放棄を意味する．本書では, 慣性力に関する混乱の原因を探るため一章を充てた．

力学の学習の大半は, 対象の系に関する運動方程式, すなわち微分方程式を立て, その解を求めることに向けられる．その際, 解析的な手法だけでなく, 数値計算も重要な手段である．複雑な式の変形につまずいたときには, とりあえずプログラムを作成して, 解の様子をあたってみることも有用である．本書では, 多くの例について数値計算の結果を図示しているが, それらのプログラムのリストを付録 (サイエンス社のサポートページ) に収録している．ダウンロードして, 自分なりにアレンジして実行することで理解を深めていただきたい．従来, Fortran や C などがよく使われてきたが, 現在では, Python や Julia など, より使いやすい言語環境が手軽に利用できる．本書では微分方程式を解くための Python のライブラリ `scipy.integrate.solve_ivp` を主に用いた．

佐藤文隆先生には本ライブラリの共編者に指名いただき，全体方針の策定や著者の選定, 査読などをご一緒することができ, 貴重な経験になった．本書の執筆に関しても, 大局的視点からの助言と励ましをいただいた．千葉祐也くんと Lee Xin Theng くんには早い段階から原稿を読んでもらい, 学部学生の立場から有益で的確なコメントを多くいただいた．感謝申し上げます．

2024 年 9 月

北野正雄

目 次

第1章　力学と微分方程式

本章では「力学」について本格的に学ぶための準備として,「微分方程式」について説明する. 力学と微分方程式は不可分のものである. 微分方程式の基礎となる「微分法」,「積分法」は, ニュートン (1643–1727) や同時代のライプニッツ (1646–1716) によって考案されたものである. しかし, 意外にもニュートンは有名な著作「プリンキピア」(1687 年)[1] の中で, 微分・積分を明示的にはほとんど使っていない. 先進的な定式化のために, 彼が創出した「新たな力学」の理解が阻害されることを恐れたのであろう. ここでは, 微分方程式を解くための解析的方法だけでなく, 数値計算の手法についても述べる.

1.1　微分と速度

小物体が直線 (x 軸) 上を運動しているとする. その時刻 t における位置を $x(t)$ で表す. **速度** $v(t)$ は位置の t に関する**微分** としてあたえられる. 時刻 t から短い時間 Δt に進んだ距離を $\Delta x := x(t + \Delta t) - x(t)$ とすると, 比 $\Delta x/\Delta t$ は, その間の〈平均〉速度を与える. Δt を小さくした極限

$$\boxed{v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{1.1}$$

は, t における〈瞬時〉速度とよばれる.[1] 実際的には, Δt を文字通りに無限に小さくする必要はない.[2] Δt を小さくして行ったときに, 比の値がほとんど変わらなくなれば, それを近似値として用いることができる. 現実問題として Δt があまりに小さいと, Δx も小さくなり, いずれも正確に測れなくなる.

---

[1]現在でも使われている $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$, $\int f(t)\mathrm{d}t$ などの微分・積分の記法はライプニッツによっている. 物理的次元 (単位) の観点からも合理的な記法である. 例えば, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の単位が m/s, $\int v(t)\mathrm{d}t$ の単位が $(\mathrm{m/s})\cdot\mathrm{s}$ であることと整合している. 高階の微分 $\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}t^n$ は $\mathrm{d}^n f/(\mathrm{d}t)^n$ と理解するとよい.

[2]速度 (すなわち微分) の定義の機微については, ファインマンの教科書 [2] の 8-2 節の挿話が面白い. 修辞を省いて骨格のみ紹介する. 警官:「時速 150 km! 速度違反です.」運転者:「走り出して 10 分 しか経っていません. 150 km も行けるはずがありません.」警官:「1 時間すれば, 150 km 進むという意味です.」運転者:「アクセルを踏み続けなければ, そんなには進みません.」警官:「今の調子で 1 時間進めばということです.」運転者:「今の調子なら 30 分で目的地に着いてしまいます.」

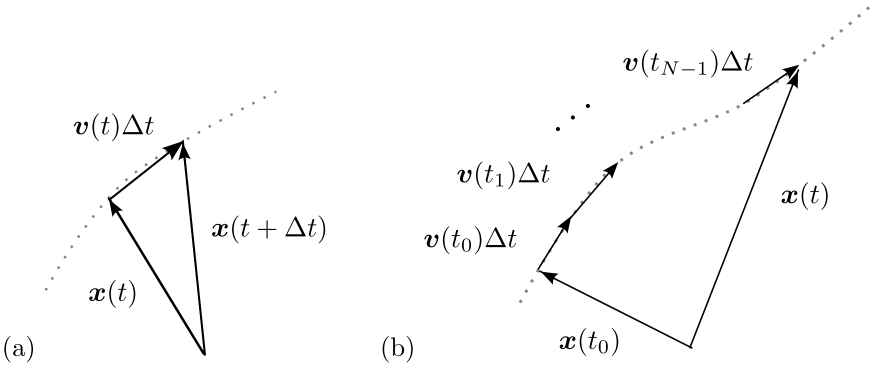


図 1.1 (2 次元) ベクトルの微分と積分

速度 v で時間 Δt の間に進む距離は $v\Delta t$ である. 時刻 t_0 から t の間, 速度 $v(t)$ が刻々と変化する場合, 十分大きい N で時間を刻んで $\Delta t = (t - t_0)N$, $t_i = i\Delta t$ とおくことで,　その間に進む距離を近似的に

$$x(t) - x(t_0) \sim \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\Delta t$$

と書くことができる. N を大きくした場合の極限は**積分**

$$\boxed{x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t' = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\Delta t} \tag{1.2}$$

として表される. 実際的には N を無限に大きく (Δt を無限に小さく) する必要はない. N をそれ以上大きくしても, 和の値がほとんど変わらなくなれば十分である. 積分は変化分であり, 初期位置 $x(t_0)$ を与えることで $x(t)$ が決まる.

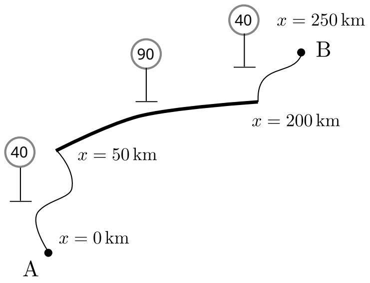
平面上や 3 次元空間内の運動の場合は, 位置を (2 次元, 3 次元) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ で表すことができる. その場合の速度は

$$\boldsymbol{v}(t) := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

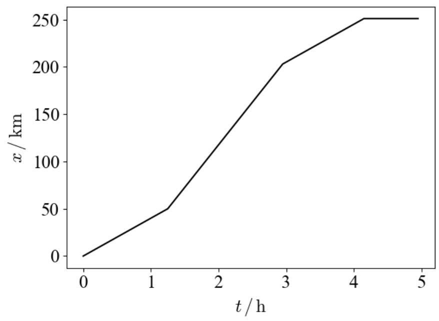
のようにベクトルで表される (図 1.1 (a)). 移動距離 (1.2) に相当する式は

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t')\,\mathrm{d}t' = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{v}(t_i)\Delta t \tag{1.4}$$

である (図 1.1 (b)).



(a)



(b)

図 1.2 制限速度と道程

1.2　微分方程式

式 (1.2) は速度が時間 t の関数 $v(t)$ として与えられた場合に, 位置 $x(t)$ を求める式になっている. 速度が時間ではなく, 位置の関数 $u(x)$ として与えられている場合を考える.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x) \tag{1.5}$$

式 (1.2) の場合と同じく, $x(t)$ を求めたいのであるが, 右辺の関数の引数が x であるため, 単純な時間積分として求めることはできない.

具体的な例として, 図 1.2 (a) のように道路の各区間で最高速度が定められており, それにしたがって車を運転する場合を考えよう. 時刻 $t = 0$ に地点 A, つまり $x(0) = 0$ を出発したとして, 時刻 t にどの地点 $x(t)$ に到達しているかを求める問題である. 最高速度が

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x) := \begin{cases} 40\,\mathrm{km/h} & (0 \le x < 50\,\mathrm{km}) \\ 90\,\mathrm{km/h} & (50\,\mathrm{km} \le x < 200\,\mathrm{km}) \\ 40\,\mathrm{km/h} & (200\,\mathrm{km} \le x \le 250\,\mathrm{km}) \end{cases} \tag{1.6}$$

と定められているとする. 図 1.2 (b) のように各区間における直線の傾きが $u(x)$ になるよう折れ線を描くことで, $x(t)$ が求められる.

さらに, 式 (1.2), (1.5) を含む一般化として, 右辺が時間にも依存する場合

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x, t) \tag{1.7}$$

も考えられる．

これは**微分方程式** (differential equation) とよばれるものの例である．一般には, 関数 $x(t)$ とその m 階微分 $x^{(m)}(t) := \mathrm{d}^m x/\mathrm{d}x^m$ $(m = n, n-1, \ldots, 1)$ を含む関係式

$$F(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \ldots, x^{(1)}, x, t) = 0 \tag{1.8}$$

のことをさす．n を微分方程式の階数という．式 (1.7) は 1 階の微分方程式である．$F(y, x, t) = -y + u(x, t)$ と考えればよい．

これまでの例のように, 関数 $x(t)$ が 1 つの変数 (つまり t) に依存する場合を**常微分方程式** (ordinary differential equation) とよぶ．多変数関数で, 複数の変数に関する微分を含むものを偏微分方程式 (partial —) とよぶ．

1.2.1　数値解法

積分が微分と比べてむずかしいことは, すでに経験されていると思う．与えられた式を微分するのは簡単だが, 積分するには, 変数変換や部分積分などさまざまな工夫が必要とされる．また解析的な解を求めるのが不可能な場合も多い．与えられた微分方程式を満たす解 $x(t)$ を式の形で求めるのは, 積分法の拡張であるため, さらにむずかしいものになる.[3] 三角関数などの, いわゆる初等関数の組み合わせで解が表せるのはかぎられた形の方程式のみである．

一方, 数値的な計算であれば, 積分は式 (1.2) のように長方形の面積 $v(t_i)\Delta t$ の和として求めることができる．類似の方法で微分方程式の数値解[4] も求めることができる．時間の区間 $[t_0, t_n]$ を n 個の小さい区間 $\Delta t = (t_n - t_0)/n$ に分割し, 分割点を t_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ と表す．

単純な微分の式 (1.1) は漸化式

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + v(t_i)\Delta t \tag{1.9}$$

で近似することができる．$i = 0$ から出発して, 逐次, 値を求めることができる．

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + v(t_0)\Delta t, \\ x(t_2) &= x(t_0) + v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t, \quad \cdots \end{aligned} \tag{1.10}$$

[3]与えられた式が微分方程式を満たすかどうかは, 微分によって確かめられる．検算は簡単なのである．

[4]数値解はパラメータが固定された 1 例に過ぎないので, 有効性は解析解に劣る．計算精度の制約も受ける．しかし, 解析的に解けないからと手をこまねいていたり, 複雑な数式の山に埋もれているよりも, いくつかの数値解をグラフに描いて眺めた方が理解が進む場合も多い．本書でも, 数値計算とグラフ化の道具を簡単に紹介したい．

積分に相当する．一方, 微分方程式 (1.5) の方は

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + u(x(t_i))\Delta t \tag{1.11}$$

となる．これも逐次的に,

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + u(x(t_0))\Delta t, \\ x(t_2) &= x(t_0) + u(x(t_1))\Delta t \\ &= x(t_0) + u\left(x(t_0) + u(x(t_0))\Delta t\right)\Delta t, \quad \cdots \end{aligned} \tag{1.12}$$

と求められる．これを**オイラー** (Euler) **法**という．(実際の数値計算では, 離散化の影響を小さくするための工夫がなされる.)

いずれも逐次的に計算が進められる．前者が単純な加算であるのに対して, 後者は関数への逐次代入が必要で, 手順が進むにつれて複雑さが積み重なる．ただし, 数値計算を行う場合の手間はそれほど変わらない.

例題 1.1 微分方程式 (1.6) を, 数値的に解くためのプログラムを示せ.

［解答例］ 例として Python を用いたプログラムを示す.

```
# ライブラリ読み込み
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 微分方程式の右辺の関数の定義
# 距離はkm, 時間はh で規格化
def u(t, x):
    if (x < 50):
        return 40
    if (x < 200):
        return 90
    if (x < 250):
        return 40
    return 0
t0 = 0.0 # 開始時刻
tN = 5.0 # 終了時刻
x0 = 0.0 # 初期値
N = 100 # 時間分割数
dt = (tN - t0) / N # 時間きざみ
t = np.linspace(t0, tN, N + 1) # の配列 t
x = np.zeros(N + 1) # の配列の初期化 x
# 初期化と繰り返し
x[0] = x0
for n in range(0, N):
```

```
    x[n + 1] = x[n] + u(t[n], x[n]) * dt
# 描画
plt.plot(t, x)
plt.show()
```

他のプログラムへの移植性を配慮した．実際的には微分方程式を解くためのライブラリを利用するのがよい (付録 C 参照). □

1.3 1 階の微分方程式の解析的解法

微分方程式の解が式の形で求められるのはかぎられた場合だけである．しかし後出の, 時間に依存しない〈線形微分方程式〉については, 解を系統的に求めることができる．また, 1 変数 1 階の微分方程式は, 線形でない場合にも解析解あるいはそれに近いものを求められる場合が多い．このような解析解は, 一般の方程式の解の振る舞いを知る手がかりとして有用である.

1.3.1 時間に依存しない場合

まず, 右辺が時間を含まない場合を考える.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x) \tag{1.13}$$

両辺の逆数をとると,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = s(x) \tag{1.14}$$

速度の逆数 $s(x) := 1/u(x)$ は, 「距離あたりの所要時間」, つまり〈遅さ〉(slowness) を表している．通常の x に関する積分によって

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} s(x')\,\mathrm{d}x' \tag{1.15}$$

が求められる．ただし, $t(x_0) = t_0$．この $t(x)$ の逆関数 $t^{-1}(t)$ が $x(t)$ に相当する．逆関数を式で表すことはむずかしい場合もあるが, グラフ上では, 縦軸と横軸を入れ替えれば済む.

例題 1.2 微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ax$ ($a \neq 0$: 定数) を解け.

［解答例］ $x \neq 0$ として, 右辺の逆関数 $s(x) = 1/(ax)$ を積分すると

$$t(x) = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{a}\log|x| + C \tag{1.16}$$

となる. これを逆に解いて,

$$x(t) = \pm C' \exp(at) \tag{1.17}$$

が求まる. $C' = \exp(-aC)$ とおいた. $C' = 0$, つまり $x(t) = 0$ も解である. □

1.3.2　変数分離法

右辺が t に依存する場合でも, 以下の形をした 1 階の微分方程式は (少なくとも形式的には) 解析解を求めることができる.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)g(t) \tag{1.18}$$

$f(x) \neq 0$ を仮定して, $f(x)$ で両辺を割り, 時間について積分すると

$$\int \frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

左辺は x に関する積分に対して変数変換 $x = x(t)$ を行ったものと考えることができて,

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.20}$$

が成り立つ. 左辺は x の関数, 右辺は t の関数であり, この等式を x について解けば, 微分方程式の解が得られる.[5]

例題 1.3 微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 2atx^2$ (a は定数) を変数分離で解け.

［解答例］ $x(t) = 0$ 以外の解を求めるために, 両辺を x^2 で割って積分する.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2a\int t\,\mathrm{d}t$$

これより, $-1/x = at^2 + C$. つまり, 解は

$$x(t) = -\frac{1}{at^2 + C} \tag{1.21}$$

[5] 式 (1.20) の両辺の被積分関数は, 微分方程式 (1.18) の両辺に形式的に $f(x)^{-1}\,\mathrm{d}t$ をかけることで, $f(x)^{-1}\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t$ と求められる. 変数分離とよばれるゆえんである.

1.4 線形微分方程式

1.4.1 1 階線形微分方程式

式 (1.5) において, 右辺 $u(x)$ が x の線形関数である場合, つまり

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax \tag{1.22}$$

を考えよう．a は定数である．すでに変数分離法で (1.17) のように解いたものであるが, ここでは今後の一般化に備えて, 別の手法を用いてみよう．時間間隔 $[0, t]$ を N 分割し, $\Delta t := t/N$, $x_n = x(n\Delta t)$ とおく．離散化された方程式は

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = ax_n \quad \text{すなわち，} \quad x_{n+1} = (1 + a\Delta t)x_n \tag{1.23}$$

となる．この隣接項の関係から,

$$\begin{aligned} x_N &= (1 + a\Delta t)x_{N-1} = (1 + a\Delta t)^2 x_{N-2} \\ &= \cdots = (1 + a\Delta t)^N x_0 = (1 + at/N)^N x_0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

が得られる．$N \to \infty$ とすると,

$$x(t) = \mathrm{e}^{at} x(0) \tag{1.25}$$

となる．ここで, ネピア数 (自然対数の底) の定義 $\mathrm{e} := \lim_{N\to\infty}(1 + 1/N)^N$ を用いた．式 (1.17) と一致する．$a > 0$ の場合は, 解は時間 $1/a$ のスケールで見ると急速に増大する．$a < 0$ の場合は, 急速にゼロに近づく．

1.4.2 連立線形微分方程式

k 次元のベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ に関する (定係数) 線形微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} \tag{1.26}$$

のように書ける.[6] A は k 行 k 列の定数行列である．離散化すると,

$$\frac{\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n}{\Delta t} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}_n \quad \text{すなわち，} \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = (\mathsf{I} + \mathsf{A}\Delta t)\boldsymbol{x}_n \tag{1.27}$$

[6] 線形微分方程式は $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ が解であれば, 線形和 $c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ も解になる．

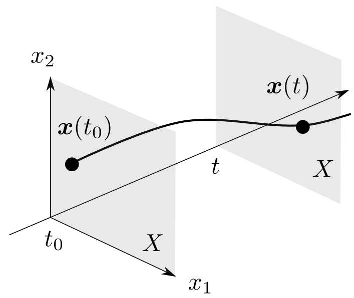


図 1.3 状態とトラジェクトリ

となる．I は単位行列である．漸化式を解くと

$$\boldsymbol{x}_N = (I + A\Delta t)^N \boldsymbol{x}_0 = \left(I + A\frac{t}{N}\right)^N \boldsymbol{x}_0 \tag{1.28}$$

式 (1.25) と同様に,

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0) \tag{1.29}$$

が得られる．ただし,

$$\mathrm{e}^{At} := \lim_{N\to\infty}\left[I + A\frac{t}{N}\right]^N \tag{1.30}$$

は $k \times k$ 行列である．この行列は A の固有値分解を用いて求めることができる．具体的な方法については, 第 10 章で述べる．

1.5　状態とトラジェクトリ

微分方程式の一般化の 1 つの方向として, 変数の多次元化がある.[7]

例えば, $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)]^\intercal$ のように k 個の変数がかかわる微分方程式を考えることができる．($^\intercal$ は行列の転置を表す.)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{1.31}$$

[7] もう一つの拡張として, 微分の次数の高階化がある．通常, 運動方程式は 2 次微分を含むので, 2 階微分方程式として扱われることが多い．しかし, 速度あるいは運動量を状態変数に加え, 多次元化することで, 1 階微分方程式として扱うことができる．次章以降で詳しく述べるが, この方向性は力学の構造的理解を深める上でも重要である．変数の数を削減することを優先して, 微分の階数を安易に増やすのは, 解を求める近道かも知れないが, 本質を見逃すおそれも多い．

ここで, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots, u_k(\boldsymbol{x})]^\intercal$ である. 1 変数に対する式 (1.9) と同様に漸化式

$$\boldsymbol{x}(t_{i+1}) = \boldsymbol{x}(t_i) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t_i))\Delta t \tag{1.32}$$

を用いて近似解を求めることができる.

この漸化式を解き進めてゆく際, ある時刻の $\boldsymbol{x}(t_i)$ の値があれば, 次の時刻の $\boldsymbol{x}(t_{i+1})$ の値を決めることができる. そして, 繰り返しによって任意の時刻の $\boldsymbol{x}(t)$ も決めることができる. この例における $\boldsymbol{x}$ のように, 未来の決定に必要最小限の変数の集まりを系の**状態** (state) という. ある時刻における「状態」(初期状態) を与えると, それ以降の状態が一意的に決定される.

ある時刻 $t = t_0$ において系がとりうる「状態」全体を, 状態集合あるいは状態空間とよび, X で表そう. 今の例では, 状態空間は k 次元である.

時刻 t_0 で系が状態 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ にあったという前提で微分方程式を解くと各時刻 t における状態 $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ が決定される. 状態を時刻を追って描いたもの $\{\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0) \mid -\infty < t < \infty\}$ を**軌道**あるいは**トラジェクトリ** (trajectory) とよぶ (図 1.3). 微分方程式の右辺が適当な条件を満たせば, 軌道は各 $\boldsymbol{x}_0$ に対してただ 1 つ決まり, それが途中で途切れたり, 分岐したり, 合流することはない. このような性質は, 微分方程式の「解の存在と一意性」によって, 一定の条件[8]の下で保証されている [3].

ニュートンが, 物体の運動が微分方程式で記述できることを示して以来, さまざまな系が, ある時刻における「状態」を知ることで, その未来の状態を確実に予言できるという考えが定着した.[9] 実際, 微分方程式を解くことで, 日食, 月食といった, 天体現象を正確に予想したり, 飛翔体を衛星や小惑星に派遣することが可能となったのである. 方程式を過去に向けて解くことで, 現在の状態から過去の状態を言い当てることもできる.

演習問題

問題 1.1 式 (1.12) を続けて $x(t_4)$ を求めよ.

問題 1.2 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(1-x)$$

を変数分離法で解いてみよ. この微分方程式は**ロジスティク** (logistic) **方程式**とよばれる.

[8] 十分条件は, ある定数 K が存在して, $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2)| \le K|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ が成り立つことである (リプシッツ条件).

[9]「因果的決定論」とよばれるものである. 力学の英語名称が mechanics, つまり〈機械じかけ〉であるのもこのような考えの反映である. 決定論の限界については, 12.3.1 項で触れる.

第 2 章　運動方程式

運動方程式の数学的実相は〈2 階の常微分方程式〉である．ニュートンの発見の真価はこの事実を明らかにした点にある．そして微分・積分といった解析学の概念もこの目的のために新たに構築されたのである．しかし, 残念なことに高校レベルの物理では, 解析学と力学の関連付けが忌避されているために, この重要な関係性は完全に隠されている．本章では運動方程式を微分方程式として表し, その簡単な解として, 等速直線運動や等加速運動を扱う．またニュートンの 3 つの法則のうち, 第 1 法則を中心に説明する．また, 万有引力の法則や物体の重さと質量の関係 (等価原理) についても議論する．

2.1　ニュートンの運動方程式

高校物理で提示される, ニュートンの**運動方程式** (equation of motion) は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{2.1}$$

の形である．ここで, $m \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{kg}$ の質点の質量, $\boldsymbol{a} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{m/s^2}$ は加速度, $\boldsymbol{f} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{N}$ は力である.[1] 加速度 $\boldsymbol{a}$ は, 速度 $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ の時間微分

$$\boldsymbol{a} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.2}$$

であり, 位置 $\boldsymbol{r}(t)$ の時間に関する 2 階微分でもある．

つまり, 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.3}$$

であり, 時刻 t に関する 2 階微分方程式である.[2].

[1] SI (国際単位系) において, 力 $\boldsymbol{f}$ の単位はニュートン (N) である．これを本書では $\boldsymbol{f} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{N}$ のように表す．この記法については付録を参照されたい．運動方程式の両辺を比較すると, $\mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{N}$ であることが分かる．

[2] 後に, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ のように, 力が速度に依存する場合も考える．

第 1 章で述べた 1 階の場合に比べて, 2 階の微分方程式は取り扱いがむずかしく見通しが悪い. そこで, 位置 $\boldsymbol{r}$ に加えて, 速度 $\boldsymbol{v} := \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ を独立変数と考える.[3] すると,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t)}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}} \tag{2.4}$$

のように 1 階の微分方程式に還元される. その代わりに 2 つの変数 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ に関する連立方程式となった. $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ が「状態」(1.5 節) を与えている. 状態を知れば, 右辺が決まり, 状態の時間変化が知れる.

3 次元の場合, 成分で表すと,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(r_1, r_2, r_3, t)/m \\ f_2(r_1, r_2, r_3, t)/m \\ f_3(r_1, r_2, r_3, t)/m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

のように, 6 つの変数 (6 元) の連立微分方程式であることが分かる.

2 階の微分方程式より 1 階連立微分方程式の方が数値計算に際しても都合がよい. 付録 C で説明する Python のライブラリ Scipy で提供される微分方程式ソルバ `integrate.solve_ivp()` も 1 階連立微分方程式を解くことを前提にしている. 他の言語のライブラリでも同様であろう.

時間反転対称性　力 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ が時刻 t に依存しない場合を考える. 微分方程式 (2.5) は, 時間反転 $t \to -t$ を行うと, 速度も $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t \to \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}(-t) = -\boldsymbol{v}$ のように反転する. その結果, 微分方程式は形を変えない. そのため, 解 $(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t))$ に対して, $(\boldsymbol{x}(-t), -\boldsymbol{v}(-t))$ も解になる. 動画を逆再生すると, 速度が逆向きになり, 軌跡を過去に辿る様子が見られるが, 同じ運動方程式 (2.5) を満たしており違和感は感じられない.

時間反転対称性は, 力 $\boldsymbol{f}$ が時刻や速度に依存する場合には成り立たない. 特に, 摩擦や粘性のように散逸がある系では速度に依存する力が働き, 時間反転対称性は成り立たない.

[3] 速度の代わりに運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を独立変数にすることもできる. この意義については第 3 章で詳しく述べる.

2.2 等速直線運動

力が加わらない, つまり $\boldsymbol{f} \equiv 0$ の場合の運動方程式 (2.4) は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \tag{2.6}$$

である. 第 1 式より, 速度は時間に依存しない一定ベクトル $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0$ になる. これを第 2 式に代入した, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0$ は簡単に積分できて,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{2.7}$$

が得られる. $\boldsymbol{r}_0 := \boldsymbol{r}(0)$ は時刻 $t = 0$ における位置である. 力が働かない場合, 質点は, 初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ を通る直線上を一定速度 $\boldsymbol{v}_0$ で移動する ($\boldsymbol{v}_0 = 0$ の場合は静止). **等速直線運動**あるいは慣性運動 (inertial motion) とよばれる. ニュートンはこれを運動方程式 (第 2 法則) [4]に先立って, 慣性の法則 (**ニュートンの第 1 法則**) として掲げた [1].

> **法則 I　すべての物体は, それに加えられた力によってその状態が変化させられないかぎり, 静止あるいは一直線上の等速運動の状態を続ける.**

この事実は次章で扱うように第 2 法則から導けるので, 冗長な法則に見えるが, 「物体は力を加えないと, やがては静止するだろう」という, 強固な日常感覚に反する事実を強調する必要があったのだと思われる. 摩擦や空気抵抗のない, 理想的な状態における運動をしっかりと想起させるための宣言である. また, 質量や運動量を導入する以前に認識されるべき事実である.[5]

2.2.1 ガリレイ変換

物体の運動はそれを観測する立場によって異なってみえる. 電車の窓からは後方に向かって動く景色が見えるが, 地上の人からは, それらは止まって見える. このような観測する立場を**基準系** (frame of reference)[6] という.

---

[4]第 3 章で述べる.

[5]第 1 法則は慣性基準系の定義と見ることもできる. ニュートンは非慣性基準系を積極的には利用していないので, そのような理論の枠組みを設定したとも考えられる. 非慣性基準系については第 8 章で議論する.

[6]類似の言葉に座標系 (coordinate system) があるが, 観測者の運動と関係するものではない. 座標は, 空間や時空間の点, あるいは多元的な物理量をスカラー量の組として表すものである. 基準系に対して座標が設定できるが, 一意的ではない. これらは独立した概念であるが,「系」いう言葉で一括りにされがちであり, 注意が必要である.