電磁気学における密度量の微分形式的な定義について

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2010 年 5 月 4 日

1 まえがき

電磁気学における密度量の微分形式的な定義を明らかにするために, テキスト [1] の **10.4.3 物質場のテンソル性** に関する追加説明を行う. 電荷 q, 電気双極子 $\boldsymbol{p}$, 微小環状電流 m はそれぞれ 0 ベクトル, 1 ベクトル, 2 ベクトルで表すのが適当であるが, その空間的平均値である, 電荷密度 $\mathcal{R}$, 分極 P, 磁化 $\boldsymbol{M}$ がそれぞれ 3 形式, 2 形式, 1 形式に変容するしくみについて調べる.

2 分極

空間のある点 P に注目し, P における独立な 2 つの接ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ を考える. 3 階の完全反対称テンソル $\mathcal{E}$ を用いて定義される

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} := \mathcal{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{1}$$

は, 点 P における (擬)1 形式を与える. 実際, P における接ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ に対して, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\zeta}$ は平行 6 面体の体積を与え, $\boldsymbol{\zeta}$ に比例している.

1 形式の幾何学的イメージ [2] は $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ で決まる面に平行な平面群（層状構造）であり, 層の密度は面積 $|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\boldsymbol{y}|$ に比例している. 接ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ が貫く面の数が 1 形式の値 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\zeta}$ になっている.

面に垂直な接ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ を導入する ; $(\mathrm{d}\boldsymbol{z},\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\mathrm{d}\boldsymbol{z},\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = 0$. $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}| \ll |\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$, $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}| \ll |\mathrm{d}\boldsymbol{y}|$ であるとする. $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ は (偏平な) 平行 4 辺形柱の体積を与える.

平行 4 辺形柱内におかれた, 電気双極子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ における $\boldsymbol{l}$ を P における接ベクトルとみなすと, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = q\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l}$ のような量を考えることができる. さらに,

$$q' := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z}} = q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}V}$$

は, $\boldsymbol{p}$ による平行 4 辺形柱の上面のみかけの電荷を与えている. $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = 0$ の場合, すなわち, 双極子が面に平行な場合は表面の電荷への寄与はない. $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{p}$ が平行な場合には, $q'\mathrm{d}\boldsymbol{z} = q\boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}$ であることに注意する.

体積 $\mathrm{d}V$ の中に多くの電気双極子 $\boldsymbol{p}_i = q_i\boldsymbol{l}_i$ $(i \in \mathrm{d}V)$ が含まれているとして, 表面のみかけの電荷の総和は

$$Q' = \sum_{i\in\mathrm{d}V} q'_i = \sum_{i\in\mathrm{d}V} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}V} = (\mathrm{d}V)^{-1}\sum_{i\in\mathrm{d}V} \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{p}_i : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathsf{P} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{2}$$

である. ここで, (擬)2 形式

$$\mathsf{P} := (\mathrm{d}V)^{-1}\sum_{i\in\mathrm{d}V} \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{p}_i \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{C/m^2} \tag{3}$$

は分極 (電気双極子密度) である.

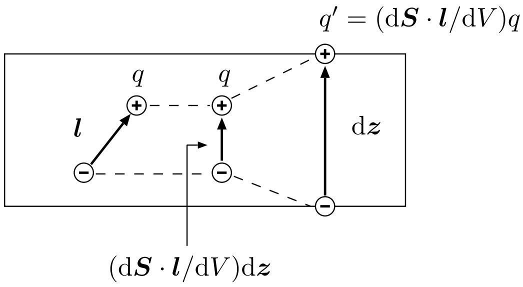

図 1: 電気双極子 $q\boldsymbol{l}$ からみかけの表面電荷 q' への変換

3 磁化

点 P における接ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ と 3 階の完全反対称テンソル $\mathcal{E}$ から作られる

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \mathcal{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{4}$$

は, 点 P における (擬)2 形式を与える. 実際, 点 P における接ベクトル $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ に対して $\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} = \mathrm{d}V$ は体積であるが, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ それぞれに比例している.

2 形式の幾何学的イメージは $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ に平行な管束であり, その面密度は長さ $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}|$ に比例している. 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ がつくる平行四辺形を通る管の数が $\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}$ になっている.

$\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ に垂直な 2 つの独立した接ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ を適当に選ぶ. $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}| \gg |\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$, $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}| \gg |\mathrm{d}\boldsymbol{y}|$ であるとする. $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{n}:\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ は (偏長な) 平行 4 辺形柱の体積を与える.

平行 4 辺形柱の内部におかれた微小環状電流 $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{S}$ を P における (反対称化しない)2 ベクトルとみなすと, $\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{m} = I\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{S}$ のような量を考えることができる. さらに,

$$I' := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}} = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}V}$$

は, $\boldsymbol{m}$ による平行 4 辺形柱の側面を周回するみかけの電流を与えている. $\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{m} = 0$ の場合, すなわち, 微小環状電流の面が平行四辺形と垂直の場合は表面の電流への寄与はない. $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{m}$ が平行な場合には, $I'\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = I\boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}$ であることに注意する.

体積 $\mathrm{d}V$ の中に多くの微小環状電流 $\boldsymbol{m}_i = I_i\boldsymbol{S}_i$ $(i \in \mathrm{d}V)$ が含まれているとして, 表面電流の総和は

$$i' = \sum_{i\in\mathrm{d}V} I'_i = \sum_{i\in\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{m}_i}{\mathrm{d}V} = (\mathrm{d}V)^{-1}\sum_{i\in\mathrm{d}V}\mathcal{E}:\boldsymbol{m}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{5}$$

である. ここで, (擬)1 形式

$$\boldsymbol{M} := (\mathrm{d}V)^{-1}\sum_{i\in\mathrm{d}V}\mathcal{E}:\boldsymbol{m}_i \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{A/m} \tag{6}$$

は磁化 (微小電流ループ密度) である.

4 電流密度

分極の場合と同じ設定で考える. 平行 4 辺形柱内におかれた, 電流モーメント $\boldsymbol{C} = q\boldsymbol{v} = I\boldsymbol{l}$ ($\overset{\mathrm{SI}}{\sim}$ A m) における $\boldsymbol{l}$ を P における接ベクトルとみなすと, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C} = I\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l}$ のような量を考えることができる. さらに,

$$I' := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{z}} = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}V}$$

は, $\boldsymbol{C}$ に等価な, 平行 4 辺形柱の底面と上面をつなぐ電流モーメントの電流を与えている. 電流モーメントの長さは $|\mathrm{d}\boldsymbol{z}|$ である. $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C} = 0$ の場合, すなわち, 電流モーメントが面に平行な場合は面をわたる電流への寄与はない. $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{C}$ が平行な場合には, $I'\mathrm{d}\boldsymbol{z} = I\boldsymbol{l} = \boldsymbol{C}$ であることに注意する.

体積 $\mathrm{d}V$ の中に多くの電流モーメント $\boldsymbol{C}_i = I_i \boldsymbol{l}_i$ $(i \in \mathrm{d}V)$ が含まれているとして, 電流の総和は

$$i' = \sum_{i\in \mathrm{d}V} I'_i = \sum_{i\in \mathrm{d}V} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C}_i}{\mathrm{d}V} = (\mathrm{d}V)^{-1} \sum_{i\in \mathrm{d}V} \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{C}_i : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{J} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{7}$$

である. $\mathrm{d}\boldsymbol{S} := \mathcal{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ を用いた. ここで, (擬)2 形式

$$\boldsymbol{J} := (\mathrm{d}V)^{-1} \sum_{i\in \mathrm{d}V} \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{C}_i \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{A/m^2} \tag{8}$$

は電流密度である.

5 電荷密度

P における独立な 3 つの接ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{z}$ を考える. これらがつくる平行 6 面体の体積は, 3 階の完全反対称テンソル $\mathcal{E}$ を用いて

$$\mathrm{d}V = \mathcal{E} \,\vdots\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{z} \tag{9}$$

であるが, (擬) 0 形式 (擬スカラー) とみなすことができる.

平行 6 面体に入る電荷の総和は

$$Q = \sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i = \sum_{i\in \mathrm{d}V} \frac{q_i \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = (\mathrm{d}V)^{-1} \sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i \mathcal{E} \,\vdots\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \mathcal{R} \,\vdots\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{z}$$

である. ここで, (擬)3 形式

$$\mathcal{R} := (\mathrm{d}V)^{-1} \sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i \mathcal{E} \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{C/m^3} \tag{10}$$

は電荷密度である.

参考文献

[1] 北野正雄: 「新版 マクスウェル方程式 — 電磁気学のよりよい理解のために」(サイエンス社, 2009)

[2] G. Weinreich: *Geometrical Vectors* (University of Chicago Press, 1998).