真空のインピーダンスと単位系

EMT-05-53

北野　正雄[†]

[†] 京都大学大学院工学研究科
〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂
E-mail: [†]kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし　真空のインピーダンス Z_0 は電磁気学において非常に重要な普遍定数である．しかし, 過去において広く用いられてきたガウス単位系において, Z_0 は無次元量 1 になってしまうため, 現在に至っても, その意義や存在そのものが十分認知されていない．ここでは, SI 単位系で表された電磁気学の諸式を相対論的に整理する, 変数の正規化によって自然単位系に移行する, あるいは単位の大きさを定義するなどの場面において, Z_0 が中心的な役割を果たすことを示す.

キーワード　真空のインピーダンス, 単位系, 次元, マクスウェル方程式, SI 単位系, 自然単位系, ガウス単位系

The vacuum impedance and unit systems

Masao KITANO[†]

[†] Dept. of Electronic Science and Engineering, Kyoto University, Katsura, Kyoto, 615-8510, Japan
E-mail: [†]kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp

Abstract　In electromagnetism, the vacuum impedance Z_0 is a universal constant, which is as important as the speed of light c in a vacuum. Unfortunately, however, its significance or the presence itself do not seem to be recognized so well. It is partly because in Gaussian units, which had widely been used for long time, Z_0 is a dimensionless constant and unity. In this paper, we clarify that Z_0 plays a major role in the following scenes: reorganizing the structure of the electromagnetic formula in reference to the relativity; renormalizing the variables toward the natural units starting from the SI unit; and defining the magnitudes of electromagnetic units.

Key words　vacuum impedance, unit system, dimension, Maxwell's equation, SI units, natural units, Gaussian units

1. はじめに

電磁気学において, 光速に対する有名な式

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{1}$$

が頻繁に登場するのに比べて, 真空のインピーダンスの式

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{2}$$

の出番ははるかに少ない．真空の誘電率と透磁率の組 (ε_0, μ_0) の別の表現として (c, Z_0) は対称性がよく, 自然なものである．しかし, 多くの文献では, 対称性の悪い組 (c, μ_0) が利用されている．

真空のインピーダンスの概念は, もともとマイクロ波の伝送など工学上の必要性から導入されたものである [1]．すなわち, 真空中を伝搬する平面電磁波の E, H の振幅比として定義され, 抵抗の次元をもっていることから, 波動インピーダンスと名付けられた [2]．そのような経緯もあって, 応用上の重要なパラメータとしてはともかく, 電磁気学における普遍量として認

識されていないのが実状である．たとえば, 電磁気の教科書の索引を調べると, その冷遇ぶりは明白である．この理由の 1 つは, 過去において広く用いられた CGS ガウス単位系においては, Z_0 は無次元量 1 になり, その役割が見えない状態にあったからである．

本稿では, SI 単位系を用いて相対論的立場から電磁気学を見直すことによって, Z_0 が普遍定数として, 本質的な役割を演じていることを明らかにする．この過程において, ガウス単位系が MKSA 単位系に比べて自然単位系に近く, 理論には適しているという, 一見もっともらしい議論が必ずしも正しくないことが見えてくる．また, これもしばしば見うけられる, 真空中での D, H 不要論が正当でないことも分かってくる．これらがいずれも, ガウス単位系というやや変則的な単位系を用いた立場からの判断であることが明らかにされる．

2. 相対論的な変数の組合わせ

相対論では, 空間 $\boldsymbol{x}$ と時間 t をひとまとめにして, 4 元ベクトル

$$(ct, \boldsymbol{x}) \tag{3}$$

として扱う．ここで速度の次元をもつ量 c は, 空間と時間の次元を合わせる働きをしている．ここで $x_0 \equiv ct$ のように時間を長さに換算して考えることにすれば, 4 元ベクトルは $(x_0, \boldsymbol{x})$ のように簡潔に表すことができる．このように空間と時間を同じ次元で表すのが, 自然単位系と呼ばれるものの方針である．形式的には $c = 1$ と置けばいいのだが, 次元が 1 つ失われてしまうことに注意する．それどころか, c そのものが消えてしまう．この不可逆性を認識して, ここでは丁寧に変数変換を行う方法を採る [3].

ここで記法を導入しておく．物理量 A と B の比が, 数すなわち無次元量であるとき, $A \overset{[\,]}{\sim} B$ と表し, “A, B の物理的次元が等しい” と読むことにする．たとえば, $ct \overset{[\,]}{\sim} \boldsymbol{x}$ と書くことができる．また, 量 A が単位 u を用いて, $A = 100\,\mathrm{u}$ である場合, $A \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{u}$ と表すことができ, $ct \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{m}$ などと書ける [4]．この記法によって, 上の議論を繰り返すと, $ct \overset{[\,]}{\sim} x$ に対して, $c \overset{[\,]}{\sim} 1$ とおくことによって, $t \overset{[\,]}{\sim} x$ とするのではなく, 新しい量 $x_0 = ct$ を導入することで, $x_0 \overset{[\,]}{\sim} x$ と考えるのである．

相対論的には, スカラポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は一体のものである．それぞれの次元 (単位) が $\phi \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{V}$, $\boldsymbol{A} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{Vs/m}$ であることを考慮すると,

$$(\phi, c\boldsymbol{A}) \tag{4}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{F 系列} & & \text{S 系列} \\
(\phi, c\boldsymbol{A}) & & \\
\downarrow \mathrm{d} & Y_0 & \\
(\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B})_2 & \longleftarrow * \longrightarrow & (c\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})_2 \\
\downarrow \mathrm{d} & Z_0 & \downarrow \mathrm{d} \\
0 & & (c\varrho, \boldsymbol{J})_3 \\
 & & \downarrow \mathrm{d} \\
 & & 0
\end{array}$$

表 1　電磁気の諸量を 4 次元的に整理したダイヤグラム．大きく見ると, 2 つの列に分類されている．左の列は力 (force) に関係する量, 右の列は源 (source) に関係する量であり, それぞれ, F 系列, S 系列とよぶことにする．4 次元における外微分 d は系列内の変数の組同士を関連づけており, ポテンシャルの定義, マクスウェル方程式, 電荷の保存則を与えている．真空のインピーダンス $Z_0 = 1/Y_0$ はホッジの星印作用素 “$*$” とともに系列間の関係を規定しており, 真空の構成方程式に対応している．このダイヤグラムにローレンツ力の式 $(p, c\boldsymbol{f})_3 = (\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B})_2 \cdot (c\varrho, \boldsymbol{J})_3$ を加えれば電磁気学の基本構造をすべて列挙したことになる．p は電力密度, $\boldsymbol{f}$ は力密度, “$\cdot$” はテンソルの縮約をあらわす．

のように 4 元ベクトル化するのが適当だと考えられる．これを引き継いで, 電場 $\boldsymbol{E} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{V/m}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{Vs/m^2}$ も次のように組にすると次元が整合する;

$$(\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B})_2. \tag{5}$$

電場と磁束密度は 4 元ベクトルではなく, 4 元の反対称 2 階テンソルを形成するのであるが, ここではそのことを形式的に添字 “2” のついた括弧でくくって示した．

一方, 電荷密度 $\varrho \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{As/m^3}$ と電流密度 $\boldsymbol{J} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{A/m^2}$ も

$$(c\varrho, \boldsymbol{J})_3 \tag{6}$$

のように組にするのがよいことが分かる．これは実際には 4 元の反対称 3 階テンソルである．電束密度 $\boldsymbol{D} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{As/m^2}$, 磁場の強さ $\boldsymbol{H} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{A/m}$ も次のようにまとめることができる;

$$(c\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})_2. \tag{7}$$

これまで見てきたように, c は相対論的対称性を有する変数の組を形成する際に現れる．この時点で 4 次元の微分形式 (反対称テンソル) として変数の組を整理したものを表 1 に示す．この表によって, 電磁気学の数学的構造が一望できる．詳しくは文献 [5] などを参照されたい．

3. 真空のインピーダンスの役割

電荷 $\varDelta q = \varrho \varDelta v$, 電流モーメント $\boldsymbol{\varDelta C} = \boldsymbol{J} \varDelta v$ ($\varDelta v$ は体積要素) が距離 r 離れた点につくるスカラーポテンシャル $\varDelta \phi$, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\varDelta A}$ はそれぞれ,

$$\varDelta \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varrho \varDelta v}{r}, \quad \boldsymbol{\varDelta A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{J} \varDelta v}{r} \tag{8}$$

と表すことができる [6]. これを式 (4), (6) を考慮して書き直すと,

$$\varDelta \phi = \frac{Z_0}{4\pi} \frac{(c\varrho) \varDelta v}{r}, \quad \varDelta (c\boldsymbol{A}) = \frac{Z_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{J} \varDelta v}{r} \tag{9}$$

となる. ここで $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ を用いた. このように真空のインピーダンスは電磁場の源 $(c\varrho, \boldsymbol{J})$ とそれによって作られる場 $(\phi, c\boldsymbol{A})$ を関係づけるパラメータの役割をしている.

同様の関係は真空に対する構成方程式: $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} = \mu_0^{-1} \boldsymbol{D}$ にも現れている;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= Z_0 (c\boldsymbol{D}), \\ c\boldsymbol{B} &= Z_0 \boldsymbol{H}. \end{aligned} \tag{10}$$

ホッジの星印作用素 "$*$" [5] を用いて $(\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B})_2 = *Z_0(c\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})_2$ と表すこともできる. 電場, 磁場の関係が統一的に 1 つのパラメータ Z_0 で表せていることは注目に値する.

また, 真空中の平面進行波に対しては, $|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$ が成り立っているが, これは, $|\boldsymbol{E}| = c\mu_0 |\boldsymbol{H}| = Z_0 |\boldsymbol{H}|$ と表すこともできる.

インピーダンス (抵抗) は電圧と電流という基本的な電気量を関係づけるものである. SI 単位系では, 電圧の単位はボルト $\mathrm{V}(= \mathrm{J/C})$, 電流の単位は アンペア $\mathrm{A}(= \mathrm{C/s})$ である. 前者が電荷の単位, クーロン C に反比例, 後者が比例していることに注意する. ここで, 表 1 の F 系列の物理量はボルトに, S 系列の物理量はアンペアに比例していること注目すると, 真空のインピーダンス Z_0 は F 系列と S 系列の変数を繋ぐという重要な働きをしていることが分かる.

4. 抵抗の単位の大きさ

電磁気における単位の大きさを変更することを考えよう. 積 $1\,\mathrm{V} \times 1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$ は仕事率であり, 電磁気学の外で決められていて動かすことはできない. したがって, 新しいアンペア A' を現在のものの k 倍にする場合には, 新しいボルト V' は現在のボルトの $1/k$ 倍にしなければならない. すなわち,

$$\mathrm{A}' = k\mathrm{A}, \quad \mathrm{V}' = k^{-1}\mathrm{V}. \tag{11}$$

これによって, 抵抗の単位であるオームの大きさも

$$\Omega' = k^{-2}\Omega \tag{12}$$

と変化させる必要がある.

物理量 A を単位 u で表した場合の数値を $\{A\} \equiv A/\mathrm{u}$, 別の大きさの単位 u' で表した場合の数値を $\{A\}' \equiv A/\mathrm{u}'$ と表すことにする. すると次の式が成り立つ;

$$A = \{A\}\mathrm{u} = \{A\}'\mathrm{u}'. \tag{13}$$

物理量 A そのものは単位の選び方には依存せず, 変化するのはそれを表現する数値 $\{A\}$ であることに注意する.

真空のインピーダンスは現在の定義では $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = c\mu_0 = (299\,792\,458\,\mathrm{m/s}) \times (4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}) \sim 377\,\Omega$ であるが, 上記の変更に伴って,

$$Z_0 = \{Z_0\}\Omega = k^2\{Z_0\}\Omega' = \{Z_0\}'\Omega' \tag{14}$$

のようにその値を現在の $\{Z_0\} = 377$ から $\{Z_0\}' = 377k^2$ に変化させる必要がある. 逆にいえば, Z_0 に対する数値を決定することが電磁気における基本単位であるアンペア, ボルト, あるいはオームの大きさを決めることになっている.

これに伴って, ボルトに比例する量 (F 系列) に対する数値は k 倍され, アンペアに比例する量 (S 系列) に対する数値は k^{-1} 倍される;

$$\begin{aligned} (\phi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})' &= k(\phi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \\ (\varrho, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})' &= k^{-1}(\varrho, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}). \end{aligned} \tag{15}$$

k, すなわち Z_0 の値の選び方は, F 系列と S 系列の量の値の相対関係を定める役割をしている.

現在の SI 単位系では同じ電流間の力によって, アンペアの大きさを定めることで, $\{\mu_0\}$, そして $\{Z_0\}$ を固定している. $\{Z_0\}$ をきめるやり方には自由度があり, 等しい大きさの電荷間の力によってクーロンの大きさを定めてもよいし, あるいは, MKSA 単位系のルーツであるジォルジ単位系 (1901 年) におけるように, 抵抗の単位オームの大きさを決めるというのでもよい. 単位の大きさの決め方は測定技術とともに変化してゆく部分である.

5. 自然単位系

表 2(a) に示すように, c を乗じた新しい物理量 $\tilde{X} = cX$ を導入することによって, 物理量の次元の種類を整理することが

$(\phi, \tilde{\boldsymbol{A}})$	V
$(\boldsymbol{E}, \tilde{\boldsymbol{B}})_2$	V/m
$(\tilde{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{H})_2$	A/m
$(\tilde{\varrho}, \boldsymbol{J})_3$	$\mathrm{A/m^2}$

(a) c 正規化

$(\phi, \tilde{\boldsymbol{A}})$	V
$(\boldsymbol{E}, \tilde{\boldsymbol{B}})_2$	V/m
$(\tilde{\boldsymbol{D}}^*, \boldsymbol{H}^*)_2$	V/m
$(\tilde{\varrho}^*, \boldsymbol{J}^*)_3$	$\mathrm{V/m^2}$

(b) c, Z_0 正規化

$(\hat{\phi}, \acute{\boldsymbol{A}})$	$\sqrt{\mathrm{N}}$
$(\hat{\boldsymbol{E}}, \acute{\boldsymbol{B}})_2$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}$
$(\hat{\boldsymbol{D}}, \acute{\boldsymbol{H}})_2$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}$
$\{\hat{\varrho}, \hat{\boldsymbol{J}}\}$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m^2}$, $\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{sm}$

(c) ガウス

$(\hat{\phi}, \acute{\boldsymbol{A}})$	$\sqrt{\mathrm{N}}$
$(\hat{\boldsymbol{E}}, \acute{\boldsymbol{B}})_2$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}$
$(\hat{\boldsymbol{D}}, \acute{\boldsymbol{H}})_2$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}$
$(\hat{\varrho}, \acute{\boldsymbol{J}})_3$	$\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m^2}$

(d) 修正ガウス

表 2　電磁気学の変数とその単位 (次元). $\tilde{X} = cX$, $X^* = Z_0 X$ である. (a), (b) のように, これらの普遍定数を用いて変数変換すると, 単位の種類が次第に集約されてゆく. (c) はガウス単位系, (d) は修正ガウス単位系での変数を $\hat{S} = S/\sqrt{\varepsilon_0}$, $\hat{F} = F\sqrt{\varepsilon_0}$, $\acute{S} = S/\sqrt{\mu_0}$, $\acute{F} = F\sqrt{\mu_0}$ を用いて表している. S は S 系列の, F は F 系列の変数である. 特に (c) の最後の行が規則性を破っていることに注意する.

できる. この場合には, アンペアとボルト, そしてメートルに集約できている.

さらに, 表 2(b) のように Z_0 を乗じた新たな物理量 $X^* = Z_0 X$ を導入すると一層整理が進み, 単位はボルトとメートルだけになっている.

電磁気学に内包される普遍定数 c, Z_0 を用いて物理量を正規化することによって, マクスウェル方程式は次のように簡単化される;

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{D}}^* = \tilde{\varrho}^*, \quad \operatorname{curl} \tilde{\boldsymbol{H}}^* = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{D}}^*}{\partial x_0} + \boldsymbol{J}^* \\ &\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{B}} = 0, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial x_0} \\ &\tilde{\boldsymbol{D}}^* = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H}^* = \tilde{\boldsymbol{B}}. \end{aligned} \tag{16}$$

これは, $x_0 = ct$ であることを考えるとガウス単位系でのマクスウェル方程式 (30) に (有理化因子 4π を除いて) 類似しているが, 電流密度の項に $(1/c)$ がない点が異なっている (この点については後に議論する). この方程式はガウス単位系ではなく, あくまでも MKSA 単位系の延長にあるものである.

自然単位系 [7] に向けての一層の整理のためには, 長さと電圧を繋ぐためにさらに普遍定数が必要である. したがって, 電磁気学の枠組では上記の正規化が限度である. 電荷の次元を持つ普遍量

$$q_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{Z_0}} \sim 5.3 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{17}$$

はプランク電荷と呼ばれる. $\hbar$ はプランク定数である. この量を用いると電圧を長さに換算することができる. すなわち, $\hbar c/q_\mathrm{p} \simeq \mathrm{Vm}$ なので, これを用いて表 2(b) の量をすべて正規化すれば, 長さだけですべてを表すことができる. 具体的には, $\varPhi_\mathrm{p} \equiv \hbar/q_\mathrm{p}$ とし, $c\varPhi_\mathrm{p}$ をそれぞれの変数にかければ, 長さの単位だけに整理できる. さらに重力定数 G を導入すれば, プランク長さ $l_\mathrm{p} = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 1.6 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$ を用いて, すべての変数を無次元化することができる. 結局, $(c, Z_0, \hbar, G)$ を用いることで, 4 つの基本的次元を消去することができる.

6.　CGS ガウス単位系

CGS 単位系では, 長さ, 質量, 時間という 3 つの力学的基本次元以外に新たな次元を導入しない方針をとっている. これは 3 元単位系とよばれるものである. それに対して MKSA 単位系は電磁気的な次元 (電流) を 1 つ加えた 4 元単位系である. (自然単位系は 0 元単位系であるといえる.)

MKSA 単位系から CGS 単位系に移るためには変数の正規化によって次元を 1 つ減らす必要がある.

CGS 静電単位系 (esu) では, クーロンの法則を

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{\hat{q}_1 \hat{q}_2}{r^2} \tag{18}$$

のように変形する. 以下, 因子 4π は無視する [8]. 正規化された "電荷"

$$\hat{q} = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_0}} \simeq \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{F/m}}} = \sqrt{\mathrm{Jm}} = \sqrt{\mathrm{N}}\mathrm{m} \tag{19}$$

は MKSA 単位系の場合と異なって, 力学的次元をもつ物理量になる.

S 系列の量は C (クーロン) に比例するので, 電荷と同じく $\sqrt{\varepsilon_0}$ で割ることで, F 系列の量は C^{-1} に比例するので, $\sqrt{\varepsilon_0}$ をかけることで, 正規化を行えばよい. 例えば, 電場と電束密度はそれぞれ

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\sqrt{\varepsilon_0} \simeq \sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}, \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}/\sqrt{\varepsilon_0} \simeq \sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}. \tag{20}$$

となり, 力学的次元で表される. また,

$$\hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}/\sqrt{\varepsilon_0} = (\varepsilon_0 \boldsymbol{E})/\sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{E}} \tag{21}$$

などから, 真空の誘電率と透磁率は

$$\hat{\varepsilon}_0 = 1, \quad \hat{\mu}_0 = \frac{1}{c^2} \tag{22}$$

となる．ここで, $c = 1/\sqrt{\hat{\mu}_0 \hat{\varepsilon}_0}$ が成り立っていることに注意する．正規化された真空のインピーダンスは

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\varepsilon}_0}} = \frac{1}{c} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{s/m} \tag{23}$$

である．

CGS 電磁単位系 (emu) では, S 系列の変数に対しては $\sqrt{\mu_0}$ をかけ, F 系列の変数に対しては $\sqrt{\mu_0}$ で割ることにより正規化を行う．これによって磁極にたいするクーロンの法則から μ_0 が消去される．磁場の強さ, 磁束密度に対応する量は

$$\acute{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}\sqrt{\mu_0} \overset{[\,]}{\sim} \sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}, \quad \acute{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}/\sqrt{\mu_0} \overset{[\,]}{\sim} \sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m} \tag{24}$$

と正規化される．このとき, 誘電率, 透磁率は,

$$\acute{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}\sqrt{\mu_0} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\sqrt{\mu_0} = \varepsilon_0\mu_0 \acute{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c^2}\acute{\boldsymbol{E}} \tag{25}$$

などから,

$$\acute{\varepsilon}_0 = \frac{1}{c^2}, \quad \acute{\mu}_0 = 1 \tag{26}$$

となる．$c = 1/\sqrt{\acute{\mu}_0 \acute{\varepsilon}_0}$ が成り立っている．正規化された真空のインピーダンスは

$$\acute{Z}_0 = \sqrt{\frac{\acute{\mu}_0}{\acute{\varepsilon}_0}} = \frac{1}{c} \overset{[\,]}{\sim} \mathrm{s/m} \tag{27}$$

である．

さて, ガウス単位系は, CGS 静電単位系と CGS 電磁単位系という 2 つの単位系の折衷として作られたものであり, 電気量に関しては前者の, 磁気量に関しては後者の正規化変数を使う．すなわち表 2(c) のように, 正規化された変数を導入する．

ここで問題になるのが電流密度の扱いである．本来, 電流は磁場に関係する量であり, 電磁単位系の $\acute{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}\sqrt{\mu_0}$ を採るべきところを, 電荷の時間変化であるという考えから, 静電単位系の $\hat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}/\sqrt{\varepsilon_0}$ を採用してしまっている．そのため, 電流密度の部分だけ次元が整合していない．

自然単位系では電荷保存則は

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}^*}{\partial (ct)} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}^* = 0, \tag{28}$$

のように, c を含んだものになっているのに対して, ガウス単位系では

$$\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{J}} = 0 \tag{29}$$

のように c を含まない通常の保存則になってしまっている．この捻れはガウス単位系でのマクスウェル方程式

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{D}} = \hat{\varrho}, \quad \operatorname{curl} \acute{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{D}}}{\partial t} + \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{J}} \\
&\operatorname{div} \acute{\boldsymbol{B}} = 0, \quad \operatorname{curl} \hat{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \acute{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \\
&\hat{\boldsymbol{D}} = \hat{\boldsymbol{E}}, \quad \acute{\boldsymbol{H}} = \acute{\boldsymbol{B}}
\end{aligned} \tag{30}$$

と自然単位系のマクスウェル方程式 (16) を比較すると明瞭に表れている．電流密度項の $1/c$ は, ガウス単位系を作るにあたって, CGS 静電単位系と CGS 電磁単位系を縫合した傷痕といえるものである．よく見うけられる, MKSA 単位系よりガウス単位系の方が自然単位系に近いので優れているという言説はこの点を見逃しているのではないだろうか. 電流密度として $\acute{\boldsymbol{J}}$ を用いる修正ガウス単位系 [9] とよばれるものがあるが, 用いられることは稀である．

光速に関しては, CGS 静電単位系, 電磁単位系のいずれに対しても,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\mu}_0\hat{\varepsilon}_0}} = \frac{1}{\sqrt{\acute{\mu}_0\acute{\varepsilon}_0}} \tag{31}$$

が成り立っている．しかし, ガウス単位系では 2 種類の正規化を混在させた結果,

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_0\acute{\mu}_0}} = 1 \neq c \tag{32}$$

であり, 電磁気における重要な関係式 (31) がうまく表せない. 真空のインピーダンスも, ガウス単位系では

$$\sqrt{\frac{\acute{\mu}_0}{\hat{\varepsilon}_0}} = 1 \tag{33}$$

となってしまい, 真空のインピーダンスの所在や意義が不明になる．これまで見てきたように, ヘルツやヘルムホルツによって 1880 年ごろまでに確定されたガウス単位系は, 相対論 (ローレンツ変換) 以降の目で見ると御世辞にも美しいとはいえない. これは時代の制約ゆえ仕方のないことであるが, 現代の視点でその欠点をしっかり認識しておくことが大切である．

表 2(b) の c, Z_0 で正規化した単位系, (d) の修正ガウス単位系での物理量を比較すると, 一様に因子 $\sqrt{\varepsilon_0}$ だけ異なっているにすぎないのだが, これまでの議論から, 前者の方が自然な正規化であることは明白である．

7. あとがき

本稿で明らかになったように, Z_0 は c に匹敵する重要なパラメータである. しかし, 長い期間にわたって用いられてきたガウス単位系の特殊性によって, その存在が隠蔽されていたといえる. また, ガウス単位系はその構成上, 磁極の概念が用いられているため, あまり物理的とはいえない E-H 対応が長く使われた原因にもなっている. 現在では, ガウス単位系は, ほとんど使われることがなくなったが, その残滓は依然として根強く残っているのである. さらに, 真空中においては D, H は本質的な意味を持たないため不要であるとの根拠のない主張も, 昔から懸念されていたように [10], ガウス単位系の影響下にあると考えられる.

謝辞 本稿に関連して議論していただき適切なコメントをいただいた霜田光一先生に感謝します.

文 献

[1] S.A. Schelkunoff, Bell System Tech. J. **17**, 17 (1938).
[2] 実際には面抵抗率の次元 (単位 Ωm/m) を持っていると考える方が自然である.
[3] よく見られる記述: 「ここでは自然単位系を用いるので $c = \hbar = \ldots = 1$ とする.」は自然と一体化する立場からはともかく, 教育的観点からは問題が多い. 現実に戻るための手掛かりを残すべきであろう.
[4] 特定の単位系に依存するのを避けるために, 次元を $[c] = LT^{-1}$ などと表すことが多いが, ここでは, 見やすさのために, SI 単位系で採用されている単位群を用いて次元を表記する.
[5] 北野正雄: SGC シリーズ 39 「マクスウェル方程式 — 電磁気学のよりよい理解のために」(サイエンス社, 2005).
[6] 霜田光一: 「光速の原理と電荷保存則からマクスウェルの式を導く」第 22 回物理教育研究大会予稿集, 2005 年 8 月.
[7] M. J. Duff, L. B. Okun, and G. Vemeziano, “Trialogue on the number of fundamental constants,” arXiv:physics/0110060 (2002).
[8] MKSA 単位系と CGS ガウス単位系を比較すると, メートルとセンチメートル, キログラムとグラム, 有理と非有理 (4π の因子の差) などがあるが, ここではこれらの自明な差異は問題にせず, もっとも本質的な点に議論を集中する. 今さら単位系間の正確な換算表を作ってみても仕方がないだろう. (正確には, CGS ガウス単位系を有理化, MKS 化したローレンツヘビサイド単位系と比較していると思えばよい.)
[9] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd Ed. (John Wiley and Sons, 1975) の付録の脚注参照.
[10] 伊藤大介 (訳), ゾンマーフェルト: 理論物理学講座 III, 「電磁気学」(講談社, 1969). 原著は 1948 年.