Levi-Civitaの記号の縮約公式の幾何学的解釈

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2006 年 11 月 19 日

Levi-Civita の記号の縮約公式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{1}$$

は添字記法を用いたベクトル解析で中心的な役割を果たしている．いろいろな証明が考えられているが，ここでは幾何学的なイメージを重視した導出を紹介する．

$j = k$ の場合は両辺は 0 になる．$l = m$ の場合も同じである．したがって，$j \neq k$ かつ $l \neq m$ の場合のみ考えればよい．

任意の正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を用いて $\epsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)_i$ と表せるので，式 (1) の左辺は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)_i(\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{e}_m)_i = (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \cdot (\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{e}_m) \tag{2}$$

と表すことができる．ここで，

$$\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{e}_m, \tag{3}$$

と定義する．ベクトルの集合 $U = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, -\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3\}$ を導入すると，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ である．U の各要素は $\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q$ $(p, q = 1, 2, 3;\ p \neq q)$ の形に一意に書ける．すなわち，対 (p, q) $(p \neq q)$ と 1 対 1 の関係にある．また，$\boldsymbol{a}$ が (p, q) に対応しているとき，(q, p) は $-\boldsymbol{a}$ に対応する．これらを考慮すると，式 (2) はさらに

$$(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) \cdot (\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b},\ \text{すなわち},\ j = l\ \text{かつ}\ k = m) \\ -1 & (\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b},\ \text{すなわち},\ j = m\ \text{かつ}\ k = l) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{4}$$

と表すことができる．1 番目のケースは $(j, k) = (l, m)$ の場合，2 番目のケースは $(j, k) = (m, l)$ の場合に相当する．($j \neq k$ かつ $l \neq m$ を前提にすると，) 2 つのケースは排他的である．$\delta_{jl}\delta_{km}$ は 1 番目のケースで 1，その他のケースでは 0 になる．同様に，$\delta_{jm}\delta_{kl}$ は 2 番目のケースのみ 1，その他のケースでは 0 になる．これらを用いると，2 つのケースをまとめて

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times \delta_{jl}\delta_{km} + (-1) \times \delta_{jm}\delta_{kl} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{5}$$

と表すことができて，右辺が得られる．

図で表すと以下のようになり，覚える必要がないほど簡単な公式であることが分る．