単位の変換について

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2011 年 10 月 30 日

1 はじめに

SI (国際単位系) の普及により, 幸運にも古い単位系 (主に CGS ガウス単位系) を利用する場面はほとんどなくなっている. しかし, 過去の文献などを読む場合に単位を換算する必要が出てくる. そのような場合には換算表 (例えば, [1] の付録) を用いればよい. ここでは量や次元に関する計算のやや高度な演習問題として, 換算係数のいくつかを求めてみよう[1].

SI と CGS ガウス単位系は以下のような複数の点で異なっており, そのために換算は結構複雑なものになる.

1. ベースとなる力学的単位のちがい
   これは, (長さ, 質量) の単位として, $(\mathrm{m}, \mathrm{kg})$ をとるか, $(\mathrm{cm}, \mathrm{g})$ をとるかの違いであり簡単な話である. それぞれ, 因子 10^2, 10^3 の違いを生ずる.

2. 有理単位系と非有理単位系のちがい
   非有理単位系は, マクスウェル方程式の基本解であるクーロンの法則やビオサバールの法則に因子 4π（単位球面の面積）が表れないようにマクスウェル方程式を調整するという本末転倒ぎみの流儀である. CGS ガウス単位系は非有理なので, 有理である SI との単位換算において付加的な因子 4π が表れる.

3. 4 元単位系と 3 元単位系のちがい
   SI では力学における 3 つの基本単位に, 電磁気固有の基本単位であるアンペアを加えた 4 つの基本単位を利用する. それに対して CGS ガウス単位系では力学的な 3 つの基本単位のみを利用する. CGS 静電単位系 (esu), CGS 電磁単位系 (emu) も同様である. $\sqrt{\varepsilon_0}$, $\sqrt{\mu_0}$ といった因子の原因である. 単位の換算を議論する際には, 次元の高い 4 元単位系 (SI) を土俵に選ぶのが便利である. (むしろ, そうせざるを得ない.)

4. CGS ガウス単位系の複合性
   CGS ガウス単位系は, CGS 静電単位系と CGS 電磁単位系という 2 つの単位系のパッチワークとして作られたという経緯がある. したがって, 背後にある 2 つの単位系を理解することが必要である. さらに困ったことに, 切り貼りの仕方が恣意的で, 今の視点で見ると合理的でないという欠点をかかえている[2].

5. 単位の命名法のちがい
   CGS ガウス単位系では, 異なる次元を持つ量に対して, 同じ名称を用いる場合が多い. すなわち, CGS 静電 (電磁) 単位系起源の単位をすべて esu (emu) で表す. たとえば, 電荷に対しても, 電流密度に対

[1] 本質的に高度というわけではないが, SI と CGS ガウス単位系, さらに後者の元になっている CGS 静電単位系 (esu), CGS 電磁単位系 (emu), これらすべてに関する知識と, 物理的次元についての正しい理解が必要という意味で, かなりハードルが高い.

[2] 文献 [1] の付録と [3] を参照.

しても同じ単位呼称 esu が使われる[3]. SI では単位と次元がよく対応しており, 単位を含めた量としての計算を行えば次元のチェックが自動的にできるのだが, CGS ガウス単位系ではこのメリットを享受できない.

本稿においては以下のような考え方で, SI と Gauss 単位系の間の変換式を求める. (1) すべての計算を 4 元単位系である SI の枠組で行う[4]. これによって, 次元のバランスがとれた量の関係式が使える. (2) CGS ガウス単位系の物理量を対応する SI の物理量で表す. 2 つの物理量の次元は一致するとは限らず, 変換係数は次元つきの量になる. (3) 同じ大きさの量を両系で表現した物理量をそれぞれの単位で表した場合の数値の間の関係を求める. これが通常, 単位の換算式とよばれるものである.

2 電荷の単位の換算

まず, 電荷に関する単位の換算を行ってみよう. SI におけるクーロンの法則は

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1}$$

である. 一方, Gauss 単位系では, CGS 静電単位系に対するクーロンの法則

$$F = \frac{\hat{q}_1 \hat{q}_2}{r^2} \tag{2}$$

を採用する. 法則や方程式レベルでは, 力学単位の大きさのちがいは現れないのに対して, 有理, 非有理のちがい (4π の有無) は現れている. さらに, 3 元, 4 元のちがいのために, 電荷の物理的次元が異なっている. SI では, 電荷はクーロン ($\mathrm{C} = \mathrm{As}$) で計られるのに対して, CGS ガウス単位系では, 静電単位 esu で計られる. クーロンの法則から $1\,\mathrm{dyn} = (1\,\mathrm{esu})^2/(1\,\mathrm{cm})^2$, すなわち, $1\,\mathrm{esu} = 1\,\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm}$ であることが分かる[5,6].

次元の異なる物理量を同じ文字で表すと混乱をきたすので, 力学的次元のみで表される CGS 静電単位系での電荷を $\hat{q}$ のように表すことにする. 換算式は, 2 つのクーロンの法則を比較することで

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} q \tag{3}$$

のように求められる. このように同じ量でもそれを表現する単位系によって物理量としての次元が異なることに注意する [2]. ここでは, 別の記号を割り当てて厳密に区別することにする[7]. すなわち,

$$\begin{aligned} &q && \cdots && \mathrm{SI} \\ &\hat{q} && \cdots && \mathrm{CGS\ esu} \\ &\acute{q} && \cdots && \mathrm{CGS\ emu} \end{aligned} \tag{4}$$

のように表す.

後のために, 式 (3) の係数 (の 2 乗) $1/(4\pi\varepsilon_0)$ を具体的に計算しておこう;

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c_0^2}{4\pi} = 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2} \times \{c_0\}^2\,(\mathrm{m/s})^2 = 10^{-7}\{c_0\}^2\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{5}$$

ここで, 関係式 $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ と定義式 $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ を用いた[8]. また,

$$\{c_0\} := \frac{c_0}{\mathrm{m/s}} = 299\,792\,458 \quad (\sim 3 \times 10^8) \tag{6}$$

[3] 固有の名称もいくつか存在する. 例えば, 電荷に対しては statcoulomb, 磁場に対して gauss, Oe など.

[4] 特定の単位系に依拠しない中立的な立場で行われる場合が多いが, よく整備された枠組が使えないために, 曖昧さや混乱を生じる危険がある. ほとんどの人が SI を学んでいる現在においては, SI の枠組を利用するのが最も有効であろう.

[5] $\mathrm{dyn} = \mathrm{g\,cm/s^2}$ (ダイン) は CGS における力の単位である. $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g} \times 1\,\mathrm{cm/s^2} = 10^{-3}\,\mathrm{kg} \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2} = 10^{-5}\mathrm{N}$.

[6] CGS ガウス単位系 (3 元単位系) における電磁量に対する単位を基本単位で表すと, このように平方根が現れる.

[7] 相対論では, 時間を $x_0 = c_0 t$ のように長さの次元にして扱う場合が多い. この場合, x_0, t は同じ時間間隔を表しているのだが, 次元は異なっている. c_0 は換算係数の役割を果たしている. 通常は, 「$c_0 = 1$ と考える」という荒っぽい一言で片付けられてしまう.

[8] μ_0 は単位ヘンリー $\mathrm{H} = \mathrm{V\,s/A} = \Omega\,\mathrm{s}$ を用いて, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ と表されることが多い. $\mathrm{H/m} = \mathrm{V\,s/(A\,m)} = \mathrm{W\,s/(A^2\,m)} = \mathrm{N/A^2}$.

は光速 c_0 を m/s で計った数値を表すものとする[9].

ある量の電荷を SI で表した場合の数値 q/C と CGS esu で表した場合の数値 $\hat{q}/\mathrm{esu}$ を比較しよう[10]. 式 (3), (5) より,

$$\frac{\hat{q}}{q} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 10^{-7/2}\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{m}}{\mathrm{C}} = 10\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm}}{\mathrm{C}} \tag{7}$$

すなわち,

$$\frac{\hat{q}}{\mathrm{esu}} = 10\{c_0\}\frac{q}{\mathrm{C}} \quad \left(\sim 3\times 10^9\frac{q}{\mathrm{C}}\right) \tag{8}$$

である[11]. SI における $q = 1\,\mathrm{C}$ の電荷に相当するものを, Gauss 単位系において計ると, およそ $\hat{q} = 3{\times}10^9\,\mathrm{esu}$ であるという意味である. 実際, $q = 1\,\mathrm{C}$ を代入すると, $\hat{q} = 10\{c_0\}\,\mathrm{esu}$ が得られる. 逆に, $\hat{q} = 1\,\mathrm{esu}$ を代入すれば, $q = (1/10\{c_0\})\,\mathrm{C} \sim 3.3\times 10^{-10}\,\mathrm{C}$ という関係が得られる.

注意すべきことは, $q = 1\,\mathrm{C}$, $\hat{q} = 10\{c_0\}\,\mathrm{esu}$ が同じ量の電荷を表しているからといって, $1\,\mathrm{C} = 10\{c_0\}\,\mathrm{esu}$ と書くことは許されないということである. $q = \hat{q}$ という式も誤りである[12].

3 その他の量に対する単位の換算

電荷の単位の換算が分かれば, 他の量の単位換算は比較的簡単である. 例えば電流の場合, 適当な時間 T を用いて $\hat{I} = \hat{q}/T$, $I = q/T$ とおくと,

$$\frac{\hat{I}}{I} = \frac{\hat{q}}{q} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 10\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm/s}}{\mathrm{C/s}} = 10\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm/s}}{\mathrm{A}} \tag{9}$$

が得られる. 同様に, 電流密度に対しては, 長さ L を用い, $\hat{J} = \hat{I}/L^2$, $J = I/L^2$ とおいて,

$$\frac{\hat{J}}{J} = \frac{\hat{I}}{I} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 10\{c_0\}\frac{(\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm/s})/\mathrm{m}^2}{\mathrm{A/m}^2} = 10^{-3}\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/(\mathrm{cm\,s})}{\mathrm{A/m}^2} \tag{10}$$

電流密度の場合, 電荷と同じ変換係数 $1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$ を持ってはいるが, SI における単位の違い ($\mathrm{A/m}^2$ と $\mathrm{A\,s}$) から変換のための数値が異なることに注意する. 電荷密度 ρ, 分極 P などの換算も同様に行える.

電場や電束密度に関しては有理・非有理の影響を考えなければならない. 両単位系におけるクーロンの法則をそれぞれ以下のように表そう：

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = q_2 E = q_2\frac{1}{\varepsilon_0}D, \quad F = \frac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{r^2} = \hat{q}_2\hat{E} = \hat{q}_2\hat{D} \tag{11}$$

電荷 q_1 がつくる電場を E, 電束密度を D などとおいた. これらを比較することで,

$$\hat{D} = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}D, \quad \hat{E} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}E \tag{12}$$

という関係が得られる. 電束密度の換算には電荷や電流密度の換算に比較すると, 余分の因子 4π がついていることに注意する.

電束密度 $\hat{D}$ の単位が $\mathrm{esu} = \sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}$ であることに注意して,

$$\frac{\hat{D}}{D} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 4\pi\times 10\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm/m}^2}{\mathrm{C/m}^2} = 4\pi\times 10^{-3}\{c_0\}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{C/m}^2} \tag{13}$$

---

[9]物理量 X を数値部分と単位部分（次元）に分解して $X = \{X\}\,[X]$ と表すことがよく行われる. 単位系に依存する分解なので厳密には, $X = \{X\}_{\mathrm{SI}}\,[X]_{\mathrm{SI}}$ などと書くべきであろう.

[10]量を単位で除したこのような表現は見慣れないものかもしれない. たとえば, $q = 2.3\,\mathrm{C}$ の両辺を単位としての量 $1\,\mathrm{C}$ で割ると, $\dfrac{q}{1\,\mathrm{C}} = 2.3$ のように数値を表す式が得られる. 分母の $1\,\mathrm{C}$ を C と略記してもよい.

[11]先の例の $x_0 = c_0 t$ は, $x_0 = \{c_0\}\,\mathrm{m/s}\times t$, すなわち, $\dfrac{x_0}{\mathrm{m}} = \{c_0\}\dfrac{t}{\mathrm{s}}$ と表すことができる.

[12]両辺の次元が不整合である. SI, CGS esu のどちらの単位系の式としても意味をなさない.

電場についても,

$$\frac{\hat{E}}{E} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-1}\{c_0\}^{-1}\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm}} = 10^4\{c_0\}^{-1}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{N/C}} \tag{14}$$

となる．これらをまとめると,

$$\frac{\hat{D}}{\mathrm{esu}} = 4\pi\times 10^{-3}\{c_0\}\frac{D}{\mathrm{C/m^2}}, \quad \frac{\hat{E}}{\mathrm{esu}} = \frac{10^4}{\{c_0\}}\frac{E}{\mathrm{V/m}} \tag{15}$$

となる.

4 CGS 電磁単位系起源の単位の換算

SI と CGS 電磁単位系 (emu) における, 電流要素間に働く力の式 (スカラー版) はそれぞれ

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 l_1 I_2 l_2}{r^2}, \quad F = \frac{\acute{I}_1 l_1 \acute{I}_2 l_2}{r^2} \tag{16}$$

である[13]．後者から, 電磁単位系での電流の単位が $\mathrm{emu} = \sqrt{\mathrm{dyn}}$ であることが分かる．また, 両式の比較から両単位系での電流の関係が

$$\acute{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}I \quad \left(= \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\hat{I} = \frac{\hat{I}}{c_0}\right) \tag{17}$$

であることが分かる[14]. (電磁単位系の $\acute{I}$ は静電単位系の $\hat{I}$ とは次元が異なることに注意．また, $\acute{I}$ は Gauss 単位系においては使われていない[15]．) 具体的に変換係数を求めると

$$\frac{\acute{I}}{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} = 10^{-7/2}\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{\mathrm{A}} = 10^{-1}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}} \tag{18}$$

すなわち, $\acute{I}/\mathrm{emu} = 10^{-1}I/\mathrm{A}$.

磁場に関する量に関しては, Gauss 単位系では電磁単位が使われる．電流間に関する力の式を

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 l_1 I_2 l_2}{r^2} = I_2 l_2 B = I_2 l_2(\mu_0 H), \quad F = \frac{\acute{I}_1 l_1 \acute{I}_2 l_2}{r^2} = \acute{I}_2 l_2 \acute{B} = \acute{I}_2 l_2 \acute{H} \tag{19}$$

と表すことで,

$$\acute{H} = \sqrt{4\pi\mu_0}H, \quad \acute{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}B \tag{20}$$

であることが分かる．電磁単位系における磁場の強さ $\hat{H}$ の単位は $\mathrm{emu} = \sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}$ であることに,

$$\frac{\acute{H}}{H} = \sqrt{4\pi\mu_0} = 4\pi\times 10^{-7/2}\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{\mathrm{A}} = 4\pi\times 10^{-3}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{A/m}} \tag{21}$$

磁束密度についても同様に

$$\frac{\acute{B}}{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = 10^{7/2}\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{N}}} = 10^{7/2}\frac{\sqrt{\mathrm{N}}/\mathrm{m}}{\mathrm{N/(A\,m)}} = 10^4\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{T}} \tag{22}$$

$\mathrm{T} = \mathrm{N/(A\,m)} = \mathrm{Wb/m^2} = \mathrm{V\,s/m^2}$ はテスラである．まとめると,

$$\frac{\acute{H}}{\mathrm{emu}} = 4\pi\times 10^{-3}\frac{H}{\mathrm{A/m}}, \quad \frac{\acute{B}}{\mathrm{emu}} = 10^4\frac{B}{\mathrm{T}} \tag{23}$$

すなわち, SI における 1T の磁束密度は, Gauss 単位系では $10^4\,\mathrm{emu} = 10^4\,\mathrm{gauss}$ に相当する.

[13] 距離 r だけ隔てて平行におかれた微小な電流要素間 $I_1 l_1$, $I_2 l_2$ 間にに働く力である．$r \ll l_1, l_2$ である.

[14] 歴史的には, $\acute{I} = \hat{I}/c_0$ や $\acute{q} = \hat{q}/c_0$ は, 光速と電磁気の関わりが認識されるきっかけとなった式である.

[15] ここでは磁場に関する量に関する換算を行うための手段として電磁単位系の電流を導入する．Gauss 単位系は電気的な量は CGS 静電単位系, 磁気的な量は CGS 電磁単位系で表すという折衷的な考えで作られたものである．この方針を通すのであれば, 磁場と相互作用する電流（や電流密度）は電磁単位系で扱うべきなのであるが, 現実の Gauss 単位系では静電単位系を採用している．この変則のために, Maxwell 方程式の電流密度項に唐突に因子 $1/c_0$ がつく．他方, Maxwell 方程式における時間微分がすべて $(1/c_0)\partial/\partial t$ の形になるにも拘らず, 電荷保存則における時間微分には $1/c_0$ がつかない．この点を正した修正 Gauss 単位系 ([1] の付録) というものがあるが, 見かけることはほとんどない.

5　換算係数の系統的な導出方法

換算のまとめを最後に付した．次元の異なる物理量を区別するとともに, 等号で結ぶべき関係は明示的に等式で表し, この種の表にありがちな曖昧さを排した．

単位の大きさに関する換算係数を系統的に求めるには, 対応する物理量の変換に現れる因子 $1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, $\sqrt{4\pi/\mu_0}$ などを各物理量の次元や単位を考慮して, 表現し直せばよい．

主要な電磁気量は, 源に関係する量 (S 量) と力に関係する量 (F 量) に分類することができる [3]. 次元的に見て, 前者は電荷や電流に比例, 後者は反比例する．具体的には,

$$S = \{q, I, D, H, P, M, \rho, J\}, \quad F = \{\phi, A, E, B\} \tag{24}$$

である．前者は次元としての比例因子にアンペア A (あるいはクーロン $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$) を, 後者はボルト V (あるいはウェーバ $\mathrm{Wb} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$) を含んでいる．すなわち, 電荷 (電流) あたりの力あるいはエネルギーなどを表す量である．S 量と F 量の積をとると, 電磁気的な次元が打ち消されて, 力学的な物理量になる．たとえば, DE はエネルギー密度になる．

S 量, F 量に関する変換則は以下のようにまとめることができる；

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{k}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} S, \quad \acute{S} = k\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} S, \\ \hat{F} &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0} F, \quad \acute{F} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} F \end{aligned} \tag{25}$$

ただし, D, H に対しては $k = 4\pi$, その他の量については $k = 1$ とする (有理化因子).

これらの変換係数の値はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S}}{S} &= \frac{k}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{k\{c_0\}}{10} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}} \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{C}}, & \frac{\acute{S}}{S} &= k\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} = \frac{k}{10} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}} \\ \frac{\hat{F}}{F} &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \frac{10^6}{\{c_0\}} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{V}}, & \frac{\acute{F}}{F} &= \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = 10^8 \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}} \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{Wb}} \end{aligned} \tag{26}$$

である．これらの式から始めて, 力学的単位部分の大きさの比を考慮することで, 各物理量に対する変換係数の値を具体的に計算することができる．

たとえば, 磁束密度に関する SI, CGS emu 間の換算は,

$$\frac{\acute{B}}{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = 10^8 \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}} \cdot \mathrm{cm/m^2}}{\mathrm{Wb/m^2}} = 10^4 \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{Wb/m^2}} = 10^4 \frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{T}}$$

のように手早く計算できる．

表に掲載されていない量についても, この表を元にして換算ができる．少し, 混乱のある例をみておこう．インダクタンス L は電流あたりの磁束と定義される．すなわち, I を電流, B を磁束密度, S を面積, $\varPhi$ を磁束として, $L = \varPhi/I = BS/I$ と表せる．GCS emu, CGS ems でのインダクタンスはそれぞれ, $\acute{L} = \acute{B}S/\acute{I}$, $\hat{L} = \hat{B}S/\hat{I}$ である．これらより, インダクタンスの換算は

$$\frac{\acute{L}}{L} = \frac{\acute{B}}{B}\frac{I}{\acute{I}} = \frac{4\pi}{\mu_0} = 10^9 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{H}}, \quad \frac{\hat{L}}{L} = \frac{\hat{B}}{B}\frac{I}{\hat{I}} = 4\pi\varepsilon_0 = \frac{10^5}{\{c_0\}^2} \frac{\mathrm{s/cm^2}}{\mathrm{H}} \tag{27}$$

のようになる．Gauss 単位系でどちらのインダクタンスを採るかは一定していないようである [1, 2]. 磁束の式にも $\acute{\varPhi} = \acute{L}\acute{I} = c_0\hat{L}\acute{I} = (1/c_0)\acute{L}\hat{I}$ のように違いが出る．起電力の式についても, $\hat{V} = \hat{L}(\mathrm{d}\hat{I}/\mathrm{d}t) = (\acute{L}/c_0^2)(\mathrm{d}\hat{I}/\mathrm{d}t) = (\acute{L}/c_0)(\mathrm{d}\acute{I}/\mathrm{d}t) = c_0\hat{L}(\mathrm{d}\acute{I}/\mathrm{d}t)$ と多様な選択が可能であり悩ましい．Gauss 単位系の綻びの一端である．

6　余談

理科年表 [4] の単位換算表における誤りが長期に亙って修正されずにいることが, 文献 [5] によって指摘された．これは換算係数の誤りというより, 単位系と EH, EB 対応の選択を連動させた点に問題があるの

だが, 換算の仕組みの複雑さや, 次元を尊重しない記法が誤りの温存に寄与したことは間違いない. さらに, 誤りが他の文献に継承されているようである（例えば [6]）.

一応, 計算を確認しておこう. 磁化 M (EB 対応) に関する換算は以下のとおりである ;

$$\frac{\hat{M}}{M} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{\{c_0\}}{10}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{s}}{\mathrm{A/m}} \quad , \frac{\acute{M}}{M} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} = \frac{1}{10^3}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{A/m}} \tag{28}$$

一方, 磁気分極 $J_\mathrm{m} := \mu_0 M$ (Kennelly 流の磁化, EH 対応) に関する対応は,

$$\frac{\hat{J}_\mathrm{m}}{J_\mathrm{m}} = \frac{\hat{\mu}_0\hat{M}}{\mu_0 M} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} = \frac{10^2}{4\pi\{c_0\}}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm^2}}{\mathrm{Wb/m^2}}, \quad \frac{\acute{J}_\mathrm{m}}{J_\mathrm{m}} = \frac{\acute{\mu}_0\acute{M}}{\mu_0 M} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}} = \frac{10^4}{4\pi}\frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{Wb/m^2}} \tag{29}$$

これを用いると, $J_\mathrm{m} = \mu_0 \times 1\,\mathrm{A/m}$ に対して, $\hat{J}_\mathrm{m} = 10^{-5}\{c_0\}^{-1}\,\mathrm{esu}$ が得られる.

参考文献

[1] J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 3rd ed. (Wiley, 1998).

[2] 青野 修: 「電磁気学の単位系」(丸善, 1990) p. 100.

[3] M. Kitano: “The vacuum impedance and unit systems”, IEICE Trans. Electron. **E92-C**, 3 (2003).

[4] 国立天文台編:「理科年表」(丸善, 2009) p. 物 6.

[5] 西村久: 日本物理学会誌 **65**, 901 (2010).

[6] 佐藤文隆:「物理定数と SI 単位」(岩波書店, 2005) p. 47.
この本は単位の換算の部分 (第 3 章) に次元が合わない式を豊富に含んでいるので注意が必要である. とくに, 次元のある c_0 と次元なしの数値 $\{c_0\}$ が区別なく同じ文字 c で表されていることが問題である (例えば, p. 40, p. 46 の最初の式). また, $1\,\mathrm{T} = 10^4\,\mathrm{Gauss}$ (つまり, $B = \acute{B}$) といった, 次元的に問題のある式も散見される. このような誤りはこの本に限ったことではないのだが, 異なる単位系が見通しの悪い隘路で繋がっていることの証である. ところで, 表 3-1 の注 (a) におけるガウス単位系の指示は変である. (本文の指示は合っている. 理科年表 [4] では, 見逃すほど微妙に太さの違う等号で指示されている.)

単位換算のまとめ

量		(CGS esu)/(SI)		(CGS emu)/(SI)
電荷	G	$\dfrac{\hat{q}}{q} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 10\{c_0\}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{cm}}{\mathrm{C}}$		$\dfrac{\acute{q}}{q} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{C}}$
電流	G	$\dfrac{\hat{I}}{I} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 10\{c_0\}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{cm/s}}{\mathrm{A}}$		$\dfrac{\acute{I}}{I} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}}$
電位	G	$\dfrac{\hat{\phi}}{\phi} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \dfrac{10^6}{\{c_0\}}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{V}}$		$\dfrac{\acute{\phi}}{\phi} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}} = 10^8\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{cm/s}}{\mathrm{V}}$
ベクトルポテンシャル		$\dfrac{\hat{A}}{A} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \dfrac{10^4}{\{c_0\}}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm}}{\mathrm{Wb/m}}$	G	$\dfrac{\acute{A}}{A} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}} = 10^6\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{Wb/m}}$
電場	G	$\dfrac{\hat{E}}{E} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \dfrac{10^4}{\{c_0\}}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{V/m}}$		$\dfrac{\acute{E}}{E} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}} = 10^6\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V/m}}$
磁束密度		$\dfrac{\hat{B}}{B} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} = \dfrac{10^2}{\{c_0\}}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm^2}}{\mathrm{Wb/m^2}}$	G	$\dfrac{\acute{B}}{B} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}} = 10^4\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{Wb/m^2}}$
電束密度	G	$\dfrac{\hat{D}}{D} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\varepsilon_0}} = 4\pi\dfrac{\{c_0\}}{10^3}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{C/m^2}}$		$\dfrac{\acute{D}}{D} = \sqrt{4\pi\mu_0} = \dfrac{4\pi}{10^5}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm^2}}{\mathrm{C/m^2}}$
磁場の強さ		$\dfrac{\hat{H}}{H} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\varepsilon_0}} = 4\pi\dfrac{\{c_0\}}{10}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{s}}{\mathrm{A/m}}$	G	$\dfrac{\acute{H}}{H} = \sqrt{4\pi\mu_0} = \dfrac{4\pi}{10^3}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{A/m}}$
分極	G	$\dfrac{\hat{P}}{P} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \dfrac{\{c_0\}}{10^3}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{C/m^2}}$		$\dfrac{\acute{P}}{P} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10^5}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm^2}}{\mathrm{C/m^2}}$
磁化		$\dfrac{\hat{M}}{M} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \dfrac{\{c_0\}}{10}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{s}}{\mathrm{A/m}}$	G	$\dfrac{\acute{M}}{M} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10^3}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm}}{\mathrm{A/m}}$
電荷密度	G	$\dfrac{\hat{\rho}}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \dfrac{\{c_0\}}{10^5}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm^2}}{\mathrm{C/m^3}}$		$\dfrac{\acute{\rho}}{\rho} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10^7}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{s/cm^3}}{\mathrm{C/m^3}}$
電流密度	G	$\dfrac{\hat{J}}{J} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \dfrac{\{c_0\}}{10^3}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s})}{\mathrm{A/m^2}}$		$\dfrac{\acute{J}}{J} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}} = \dfrac{1}{10^5}\dfrac{\sqrt{\mathrm{dyn}}/\mathrm{cm^2}}{\mathrm{A/m^2}}$

物理定数		CGS esu		CGS emu
真空の誘電率	G	$\hat{\varepsilon}_0 = 1$		$\acute{\varepsilon}_0 = 1/c_0^2$
真空の透磁率		$\hat{\mu}_0 = 1/c_0^2$	G	$\acute{\mu}_0 = 1$
光速の関係式		$c_0 = 1/\sqrt{\hat{\mu}_0\hat{\varepsilon}_0}$		$c_0 = 1/\sqrt{\acute{\mu}_0\acute{\varepsilon}_0}$
真空インピーダンス		$\hat{Z}_0 = 1/c_0$		$\acute{Z}_0 = c_0$

- SI における量 X に対応する, CGS 静電単位系の量を $\hat{X}$, CGS 電磁単位系の量を $\acute{X}$ のように表す.
- G は Gauss 単位系が採用している物理量に関する式である.
- Gauss 単位系では, $1/\sqrt{\acute{\mu}_0\hat{\varepsilon}_0} = 1$ であり, 光速の関係式 $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ に相当する式は成り立たない. また, 真空のインピーダンスに相当する量は $\sqrt{\acute{\mu}_0/\hat{\varepsilon}_0} = 1$ である.
- $\{c_0\} = c_0/(\mathrm{m/s}) = 299\,792\,458$, $\{\mu_0\} = \mu_0/(\mathrm{H/m}) = 4\pi\times 10^{-7}$.
- $\mathrm{dyn} = \mathrm{g}\cdot\mathrm{cm/s^2} = 10^{-5}\mathrm{N}$ は力の単位 (CGS), $\mathrm{Wb} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{T}\cdot\mathrm{m^2}$ は SI 磁束の単位 (SI) である.
- CGS では, 物理量に依らず単位 emu, esu が用いられるが, ここでは次元を明示するようにした.

SIにおける電磁気の基本方程式

- 電磁力 (点電荷, 体積あたり)

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

- ポテンシャル

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}$$

- Maxwell 方程式 (力場)

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$$

- 構成方程式[16]

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$$

- Maxwell 方程式 (源場)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \varrho, \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

- 電荷保存

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

他の単位系での方程式は換算表の変数変換を用いれば簡単に求められる. たとえば, $\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{J}$ をガウス単位系で表すためには,

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi\mu_0}}\operatorname{curl}\acute{\boldsymbol{H}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{D}}}{\partial t} + \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{J}}$$

すなわち,

$$\operatorname{curl}\acute{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{c_0}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{D}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c_0}\hat{\boldsymbol{J}}$$

同じく, 電流間に働く力 [式 (16)] は

$$F = \frac{1}{c_0}\frac{\hat{I}_1 l_1 \hat{I}_2 l_2}{r^2}, \tag{30}$$

アンペールの法則 $H = I/2\pi r$ は

$$\acute{H} = \frac{2}{c_0}\frac{\hat{I}}{r} \tag{31}$$

となる. もともと, CGS emu における磁気定数の簡単さ ($\acute{\mu}_0 = 1$) を採用したつもりのガウス単位系なのであるが, これらの式に見られるように, 磁場と電流の関係が覚えにくい形になっている.

[16]EH 対応では, 磁気分極密度 $\boldsymbol{J}_\mathrm{m} := \mu_0\boldsymbol{M}$ を導入し, 磁気に関する構成方程式を $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_\mathrm{m}$ とする.