量子論ことはじめ

阪大 QIQB, **京大**
北野 正雄

The Beginnings of Quantum Mechanics

QIQB, Univ. Osaka and Kyoto Univ.
M. Kitano

2025 年は量子物理学誕生 100 周年にちなんで, さまざまな行事や出版が行われ, 量子論成立の頃に思いを馳せる機会が増えている. 100 年の歴史を振り返れば、原子や原子核を始めとする物質の様相の理解から, 宇宙の起源や進化の解明まで, 多岐にわたる発展を遂げた. 計測分野では多くの物理量が量子的効果を用いて驚異的な精密さで測られるようになった. さらに量子論が内包する深淵な本質であるエンタングルメントを操る技術が進展し, 量子情報・量子計算といった分野が展開している.

1925 年のハイゼンベルクによる行列力学の構築は長く続いた試行錯誤の前期量子論を脱して, 本格的な量子論の時代への飛翔のきっかけとなった. その後, シュレディンガーによる波動方程式の導入はボルンの確率解釈とともに, 量子論の直感的理解を促すものとした.

本講演では同時期の立役者の一人であるディラックの活躍に注目したい. 彼は量子論の先駆というよりも, むしろ, それに引き続く量子電磁力学 (QED, 1927) と相対論的電子論 (ディラック方程式, 1928) といった華々しい貢献の方が目立っている. しかし, ハイゼンベルクの行列力学を承けて彼が確立した正準量子化 (正準交換関係) は, 古典力学に根ざす的確な定式化はより注目されるべき点である [1]. ここでは, 量子論の根幹を支え続けてきたディラックの業績の一端を振り返ってみたい.

1. **正準交換関係の量子化**　ディラックはハイゼンベルクの行列の無限小変化が反対称積 (交換子) $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ の形になることを導き, 古典力学のポアソン括弧式との代数的類似性を見出した. さらに, ボーア・ゾンマーフェルトの量子条件と対応原理を用いて, 交換子の古典極限が

$$\frac{2\pi}{\mathrm{i}h}[\hat{A}, \hat{B}] \quad \xrightarrow{\text{古典}} \quad \{A, B\}_{\mathrm{PB}} := \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}$$

   となることを導いた [1]. さらに, シュレーディンガーによって提案されていた波動力学と行列力学との間の等価性を示した (1926).

2. **教科書**　有名なディラックの教科書 [2] は彼が 30 歳になる直前の 1930 年に出版されている. 量子論成立直後にもかかわらず, 現在でも十分通用する高い完成度のテキストが世に送りだされたことは特筆すべきである. さらに, 生涯にわたって改訂が続けられたことも称賛に値する (2 版: 1935, 3 版: 1947, 4 版: 1958, 改訂 4 版: 1967. 我が国でも, 仁科, 朝永ら

によって第 2 版の翻訳が 1936 年に出版されている.)

3. **ブラケット記法と双対**　ブラケット記法もディラックの重要な貢献である. 彼は量子論の記法に特化した論文を 1938 年に発表した [3]. 優れた記法の条件と意義について述べながら, ブラケット記法を導入し, その後, 自身の教科書の改訂版 (第 3 版以降) にそれを反映させた [4]. 量子状態を抽象的な複素線形空間 $\mathcal{H}$ の要素としてケットベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ として表す記法である. 今日の量子情報, 量子計算の理論的な展開は, この記法によるところが大である. ブラベクトル $\langle\phi|$ は双対空間 $\mathcal{H}^*$ の要素として独立した意味を付与された. すなわち, $\mathcal{H}$ 上の線形汎関数であり, $\langle\phi|\psi\rangle$ は内積というより, 双対積 (pairing) を意味しているのである. 線形空間における「双対」は当時としては新しい数学的概念であり, 先進的なアプローチであったといえる. ブラケット記法の利点の 1 つは (圏論でも重要な) 結合則が成り立つことである. たとえば, $\langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle) = (\langle\phi|\hat{A})|\psi\rangle$ であり, 括弧が省略できる. 内積に引っ張られた折衷的記法では $\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\phi|\psi\rangle$ と書くことになる. 初等的な教科書から姿を消しかけていたブラケットが最近の量子計算の隆盛で蘇ってきたのは喜ぶべきことである.
4. **デルタ関数**　連続的な基底ベクトルが満たす正規直交条件をデルタ関数の導入により $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ と表した. 離散の場合の $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ に対応するものである. デルタ関数は通常の意味では関数ではないが, 後に超関数 (distribution) として数学的な正当化がなされた [5]. すなわち, 滑らかな関数空間上の線形汎関数として定式化された. 関数の滑らかさのお蔭で, 超関数は何回でも微分できる. 公式 $x\delta'(x) = -\delta(x)$ は量子論では重要である.
5. **ディラック定数** $\hbar$　黒体輻射の説明のためにプランクによって導入された普遍定数 h は, 周波数 ν の光のエネルギーが $E = h\nu$ で離散化されているというアインシュタインの光量子仮説 (1905) につながった. ディラックは早い時期から h の代わりに $\hbar := h/(2\pi)$ を用いた. 換算 (reduced) プランク定数またはディラック定数ともよばれるものである. これによって, 正準交換関係が $[\hat{q}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\hat{1}$ のように簡潔に表現される. また, 角運動量の量子化条件も $\hbar$ を用いると簡単になる. 周波数 ν, 波長 λ の代わりに角周波数 ω, 波数 k を用いてアインシュタインの式, ド・ブロイの式は $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ と系統的に書かれるようになった. h も $\hbar$ も作用の次元を持ち, 単位は $\mathrm{J\,s}$ である. もし, 角度に (1 以外の) 次元を与えると, 角運動量と作用の次元は異なったものになる. その場合, 第 3 のプランク定数 (単位 $\mathrm{J\,s/rad}$) が現れることになる [6].

参考文献

[1] P.A.M. Dirac: Proc. Roy. Soc A **109**, 642 (1925).
[2] P.A.M. Dirac: The Principles of Quantum Mechnics, 1st Edtion (Clarentdon Press, 1930).
[3] P.A.M. Dirac: Math. Cambridge Phil. Soc. **35**, 416 (1939).
[4] 北野正雄: 数理科学 **739**, 45 (2025).
[5] L. シュワルツ: 数理物理の方法 (岩波書店, 1966).
[6] 北野正雄: 大学の物理教育 **31**, 63 (2025).