単位系の数学的構造について

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2011 年 6 月 3 日

1 はじめに

単位系は単なる単位の集まりではない. まず, 少数の単位を基本単位として選定し, 他の単位は基本単位の組み合わせ (積, 商, べき) として表すことで, 多くの種類の単位を系統的, 構造的に整理することを目指すものである. 基本単位以外の単位を, 組立単位または誘導単位とよぶ. 基本単位として, 何を, いくつ, 選ぶかということに関しては自由度がある. このように単位系には多様性があるので, 単位系相互の比較を行う必要がある. 異なる単位系の関係を明らかにするとともに, 基本単位の選定が持つ意味について考察する.

2 単位系の考え方

対象となる量の集合を Ω とする.

任意の $Q \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ に対して, $cQ \in \Omega$ である. また, (ゼロでない) 任意の $Q, P \in \Omega$ に対して量の積 QP, 量の商 Q/P もそれぞれ Ω の要素である. 一般に $n, m \in \mathbb{Q}$ に対して, $Q^m P^n \in \Omega$ も量である.

量の対 $Q_1, Q_2 \in \Omega$ に対して, $c \in \mathbb{R}$ が存在して, $Q_1 = cQ_2$ のとき, 量の和 $(Q_1 + Q_2) \in \Omega$ が定義される.

単位系の役割を調べよう. N 個の基準とすべき量, すなわち, 基本単位 $u_i \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, N)$ を選定し, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ とおく.

任意の量 $Q \in \Omega$ に対して, $q \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Q}^N$ を対応させるルール (写像) があるものとし, それを

$$\mathcal{U}(Q) = q\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} \tag{1}$$

と表す. $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} := u_1^{d_1} \cdots u_n^{d_N} = [Q]_u$ は単位部分, $q = \{Q\}_U$ は数値である. $\boldsymbol{d}$ を (物理的) 次元とよぶことにする.

写像 $\mathcal{U} : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n$ は, 以下の性質を満たすものとする.

1. 任意の $Q \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ について,
$$\mathcal{U}(cQ) = (cq)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}. \tag{2}$$

2. ゼロでない量 Q, P がそれぞれ $\mathcal{U}(Q) = q\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}, \mathcal{U}(P) = p\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ と表されるとして, $m, n \in \mathbb{Q}$ に対して
$$\mathcal{U}(Q^m P^n) = (q^m p^n)\boldsymbol{u}^{m\boldsymbol{d}+n\boldsymbol{b}} \tag{3}$$

3. 量 Q_1, Q_2 の和がとれる場合には, $\mathcal{U}(Q_1) = q_1\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}_1}, \mathcal{U}(Q_2) = q_2\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}_2}$ おいて, 次元は等しい. すなわち, $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{d}_2\,(= \boldsymbol{d})$ である. そして, 和の表現は
$$\mathcal{U}(Q_1 + Q_2) = (q_1 + q_2)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} \tag{4}$$

一方, 式 (2–4) の右辺のような表現を作った場合, 対応する量が存在するものとする. つまり, $\mathcal{U}$ は全射であるとする.

このような対応ルール $\mathcal{U}$ と基本単位の集まり $\boldsymbol{u}$ をとりまとめて, $U = (\mathcal{U}, \boldsymbol{u})$ を単位系という. ルールを明示せず, $\boldsymbol{u}$ を単位系という場合が多い.

3 単位系の間の半順序関係

単位系 U における 2 つの量の表現 $\mathcal{U}(Q) = q\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{U}(P) = p\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ に対して, $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(P)$, つまり, $q = p$ かつ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ が成り立つことを, $Q \overset{U}{=} P$ と表すことにする. $Q = P$ なら, $Q \overset{U}{=} P$ であるが, 逆は必ずしも成り立たない.

関係 $\overset{U}{=}$ が同値関係であることは明らかである. (反射律, 対称律, 推移律がなりたつ.)

2 つの単位系 U, V において,

$$Q \overset{U}{=} P \quad \Rightarrow \quad Q \overset{V}{=} P \tag{5}$$

がつねに成り立つとき,

$$U \supseteq V \tag{6}$$

と表し, 単位系 U は V を包含するという. U において同一に表現される量は V においても同一に表現されるということである. V において区別される量は, U においても必ず区別されるということもできる.

$U \supseteq V$ かつ $U \subseteq V$ が成り立つ場合には, $U \sim V$ と表すことにする. これによって単位系の間には半順序関係が定義される. (反射律, 対称律, 反対称律が成り立つ.)

$U \supseteq V$ であるとする. 同値関係 $\overset{U}{=}$ による商集合 $\Omega_U = \Omega/\overset{U}{=}$ を考える. すなわち, Ω_U は U において同一視される量の集まりの集合である. $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}\pi_U$ によって定義される自然な写像 $\tilde{\mathcal{U}} : \Omega_U \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ は全単射である. $\pi_U : \Omega \to \Omega_U$ は同値関係 $\overset{U}{=}$ に関する標準射影である. 同様に, $\mathcal{V}$ から求められる $\tilde{\mathcal{V}} : \Omega_V = \Omega/\overset{V}{=} \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M$ も全単射である.

関係 $\overset{U}{=}$ による同値類は, $\overset{V}{=}$ による同値類に必ず含まれるので, 分類としてはより細かい. したがって, $\pi_V = \sigma\pi_U$ を満たす, Ω_U から Ω_V への写像 (全射) σ が存在する.

合成写像 $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{V}}\sigma\tilde{\mathcal{U}}^{-1}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ から, (Ω_U, Ω_V 経由の) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M$ への写像 (全射) であり, 単位系 U による表現から, 単位系 V による表現への変換を与えるものである. $N \geq M$ であることに注意する.

$U \sim V$ のとき, $\mathcal{T}$ は可逆な写像になる.

例 (MKS) $\sim$ (CGS), (MKSA) $\sim$ (MSVA), (MKSA) $\supseteq$ (CGS emu), (MKSA) $\supseteq$ (CGS esu), (CGS emu) $\nsim$ (CGS esu). ただし, CGS 単位系はすべて有理化されているとする. 最後の関係は, $\mu_{0,\mathrm{emu}} = 1$, $\mu_{0,\mathrm{esu}} = c_{0,\mathrm{esu}}^{-2}$, $\varepsilon_{0,\mathrm{esu}} = 1$, $\varepsilon_{0,\mathrm{emu}} = c_{0,\mathrm{emu}}^{-2}$ より分かる.

例 自然単位系ではすべての量が無次元であり, (自然単位系) $\subseteq$ (MKSA), (CGS emu), (CGS esu)

4 単位系の変換

2 つの単位系 $U = (\mathcal{U}, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)$), および, $V = (\mathcal{V}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, u_M)$ を考える. $U \supseteq V$ であるとする. ある量 Q の単位系 U, V における表現をそれぞれ,

$$\mathcal{U}(Q) = Q_U = q_U\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}, \quad \mathcal{V}(Q) = Q_V = q_V\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}} \tag{7}$$

と表す[1]. ただし, $q_U, q_V \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Q}^N$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Q}^M$ である. 先に述べたように, これらの表現の関係を写像として

$$Q_V = \mathcal{T}(Q_U) \tag{8}$$

と表すことができる.

$\mathcal{T}$ を具体的に求めよう. U の基本単位 $u_i \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, N)$ はそれぞれ, U における表現とみなすこともできる: $\mathcal{U}(u_i) = 1 \times u_i^1$. したがって, $\mathcal{T}$ でうつすことができる. 一方, $u_i \in \Omega$ の V における表現を, $\mathcal{V}(u_i) = k_i \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{t}_i}$ と表す. ただし, $k_i \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t}_i = (t_{1i}, \ldots, t_{Mi})^{\mathrm{T}}$, $t_{ji} \in \mathbb{Q}$ $(j = 1, \ldots, M)$ である. これらより,

$$\mathcal{T}(u_i) = k_i \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}_i} \tag{9}$$

である. これを利用して, U による一般の量の表現 $\mathcal{U}(Q) = Q_U = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$ をうつすと,

$$Q_V = \mathcal{T}(Q_U) = (q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}}) \boldsymbol{v}^{T\boldsymbol{d}} \tag{10}$$

となる. ただし, $\boldsymbol{c} = T\boldsymbol{d}$ は, 具体的には

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots\cdots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{M1} & t_{M2} & \cdots\cdots & t_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \tag{11}$$

である. $\mathrm{rank}\, T = M$ が成り立つ. このように, 単位系の変換 $\mathcal{T} : \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M$ は $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ と $T \in (\mathbb{Q}_N \to \mathbb{Q}_M)$ で規定されることが分かる.

$N = M$ の場合は, T は正則行列であり, 変換 $\mathcal{T}$ は可逆になる. 表現の間に 1 対 1 対応が存在するので, U, V は本質的には異なった単位系とはいえない. MKSΩ, MSVA などは MKSA と同じ枠組にあるといえる[2].

$N > M$ の場合には, T は自明でないゼロ空間 $\mathrm{Ker}\, T$ をもち, その次元は $L = N - M \geq 1$ である. ただし, ゼロ空間 $\mathrm{Ker}\, T$ は $T\boldsymbol{d} = 0$ となる $\boldsymbol{d}$ がつくる線形空間であり, 核ともよばれる.

ゼロでない $\tilde{\boldsymbol{d}} \in \mathrm{Ker}\, T$ を一つ選ぶ. U における量の表現

$$\tilde{Q}_U = \tilde{q} \boldsymbol{u}^{\tilde{\boldsymbol{d}}} \tag{12}$$

を $\mathcal{T}$ でうつすと, $T\tilde{\boldsymbol{d}} = 0$ なので,

$$\tilde{Q}_V = \mathcal{T}(\tilde{Q}_U) = \tilde{q} \boldsymbol{k}^{\tilde{\boldsymbol{d}}} \tag{13}$$

のような V における無次元量が得られる. これが 1 になるように, つまり, $\tilde{q} = \boldsymbol{k}^{-\tilde{\boldsymbol{d}}}$ と選んでおけば, つぎのようないいかたができる.

> U において
>
> $$\tilde{Q}_U = \boldsymbol{k}^{-\tilde{\boldsymbol{d}}} \boldsymbol{u}^{\tilde{\boldsymbol{d}}}, \quad \tilde{\boldsymbol{d}} \in \mathrm{Ker}\, T \tag{14}$$
>
> と表現される量は V においては 1 とおくことができる: すなわち, $\tilde{Q}_V = \mathcal{T}(\tilde{Q}_U) = 1$.

このように, $L = N - M$ 個の独立な $\tilde{\boldsymbol{d}}_l \in \mathrm{Ker}\, T$ $(l = 1, 2, \ldots, L)$ に対して, それぞれ同一視を行うことで, 単位系 U から V への移行が行われる. 基本単位の数を減らすためには, それに見合った数の換算の仕組みが必要なのである.

[1] 同じ物理量でも単位系が異なると, 次元が異なるので, $Q_U = Q_V$ と書くことはできない. $Q = Q_U$ なども正しい式ではない. ベクトルにおいて $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2'$ だからといって, $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$ とかけないのと同じことである. 複数の単位系を扱う場合には注意が必要である.

[2] このような場合には, $Q_U = Q_V$ という式は許される.

5　いくつかの例

例 1

$U = \{\mathrm{A}, \mathrm{V}\}$, $V = \{\mathrm{W}, \Omega\}$ の場合,

$$\boldsymbol{k} = (1, 1), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

であり, $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ である. つまり, T は可逆であり, 本質的な単位変換ではない.

例 2

$U = \{\mathrm{m}, \mathrm{s}\}$, $V = \{\mathrm{m}\}$ の場合,

$$\boldsymbol{k} = (1, \{c_0\}_U), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

であり. ただし, $\{c_0\}_U := c_{0U}/(\mathrm{m/s}) = 299\,792\,458$. $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Span}\{(1, -1)^{\mathrm{T}}\}$ である[3]. $\tilde{\boldsymbol{d}} = (1, -1)^{\mathrm{T}}$ として, U における物理量 $c_{0U} = \{c_0\}_U\, \mathrm{m\, s^{-1}}$ (すなわち, 光速) を V においては $c_{0V} = 1$ とおくことで, 単位系の移行が行える. 自然単位系への第一歩である.

例 3

$U = \{\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A}\}$, $V = \{\mathrm{cm}, \mathrm{g}, \mathrm{s}\}$, すなわち MKSA 単位系から GCS 単位系への移行を考える. 有理化電磁単位系 (emu) の場合は,

$$\frac{(I_{\text{r-emu}})}{I_{\mathrm{SI}}} = \frac{(\sqrt{4\pi} I_{\mathrm{emu}})}{I_{\mathrm{SI}}} = \sqrt{\mu_{0U}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{10} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}} \tag{17}$$

であることを考慮して,

$$\boldsymbol{k} = (100,\ 1000,\ 1,\ \sqrt{4\pi}/10\}), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Span}\{(-1/2, -1/2, 1, 1)^{\mathrm{T}}\}$ である. $\tilde{\boldsymbol{d}} = (1, 1, -2, -2)^{\mathrm{T}}$ として, U における物理量

$$\mu_{0U} = 100^{-1} \times 1000^{-1} \times 4\pi \times 10^{-2}\, \mathrm{m\, kg\, s^{-2}\, A^{-2}} = 4\pi \times 10^{-7}\, \mathrm{N/A^2} \tag{19}$$

を V においては $\mu_{0V} = 1$ とおくことで, 単位系の移行が行える.

非有理単位系は本稿の枠組にはうまく収まらない. 同じ次元を持つ量であっても, 変換係数が $\sqrt{4\pi}$ の場合と, $1/\sqrt{4\pi}$ の場合があるからである.

例 4

同じく, $U = \{\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A}\}$, $V = \{\mathrm{cm}, \mathrm{g}, \mathrm{s}\}$, として, MKSA 単位系から有理化静電単位系 (emu) への移行を扱う:

$$\frac{(I_{\text{r-esu}})}{I_{\mathrm{SI}}} = \frac{(\sqrt{4\pi} I_{\mathrm{esu}})}{I_{\mathrm{SI}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{0U}}} = \sqrt{4\pi} \times 10 \times \{c_0\}_U \frac{\sqrt{4\pi}}{10} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}} \tag{20}$$

[3] $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots\}$ は $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots$ が張る空間を表す.

であることを考慮して,

$$\boldsymbol{k} = (100,\, 1000,\, 1,\, 10\sqrt{4\pi}\{c_0\}_U), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\{(-3/2, -1/2, 2, 1)^{\mathrm{T}}\}$ である. $\tilde{\boldsymbol{d}} = (-3, -1, 4, 2)^{\mathrm{T}}$ として, U における物理量

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0U} &= 100^3 \times 1000 \times (4\pi)^{-1} \times \{c_0\}_U^{-2}\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2 \\ &= \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times \{c_0\}_U^2} \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{1}{\mu_{0U} c_{0U}^2} \end{aligned} \tag{22}$$

を V においては $\varepsilon_{0V} = 1$ とおくことで, 単位系の移行が行える.

なお, ガウス単位系は有理化したとしても, さらに他の理由で枠組にうまく収まらない. ガウス単位系は CGS emu と CGS esu の折衷であり, 条件 $\mu_{0V} = 1$ と $\varepsilon_{0V} = 1$ を対象となる量の種類によって使い分けているからである. この 2 つの条件を同時に満たすことは, 基本単位の数を $N = 4$ から $M = 3$ にするためには明らかに過剰である. 実際, 重要な関係式 $c_{0V} = 1/\sqrt{\mu_{0V}\varepsilon_{0V}}$ も成り立っていない.

これらのことは, 古い単位系 (非有理単位系, 3 元対称化単位系) が合理的にできていないことの反映である. とくに, ガウス単位系やその有理化版であるローレンツ・ヘビサイド単位系は厳密な意味での単位系ではなく, 「単位系もどき」というべきものである.

例 5

もどきではない, 純正の 3 元対称単位系を作ってみよう. $U = \{\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A}\}$, $V = \{\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}\}$ とする. U において真空インピーダンス $Z_{0U} = \sqrt{\mu_{0U}/\varepsilon_{0U}} = c_{0U}\mu_{0U}$ を用いて仕事率 P_U と電流 I_U を $P_U = Z_{0U} I_U^2$ のように関係づけることにする. すると, 電流を力学的な量で表すことができる. これを利用して単位系の変換を行ってみよう.

$$\boldsymbol{k} = (1,\, 1,\, 1,\, \sqrt{\{Z_0\}_U}), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

ただし, $\{Z_0\}_U = Z_{0U}/\Omega = \{c_0\}_U\{\mu_0\}_U \sim 377$. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\{(-1, -1/2, 1, 1)^{\mathrm{T}}\}$ なので, $\tilde{\boldsymbol{d}} = (2, 1, -2, -2)^{\mathrm{T}}$ とする. U における物理量 $Z_{0U} = \{Z_0\}_U\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{A}^{-2} = \{Z_0\}_U\,\Omega$ を, V において $Z_{0V} = 1$ とおくことができる.

この変換によってマクスウェル方程式は見かけ上, 変化しないが, 構成方程式は $\boldsymbol{D}_V = c_{0V}^{-1}\boldsymbol{E}_V$, $\boldsymbol{H}_V = c_{0V}\boldsymbol{B}_V$ のようになる. ひきつづいて, 例 2 の変換を行って 2 元単位系 $W = \{\mathrm{m}, \mathrm{kg}\}$ に移行すると, $c_{0W} = 1$ となり, 構成方程式は $\boldsymbol{D}_W = \boldsymbol{E}_W$, $\boldsymbol{H}_W = \boldsymbol{B}_W$ となる.

6 正規化と部分単位系

同じ物理量であっても, 異なる単位系での表現は次元が異なるので, それらを安易に等号で結べないことはすでに述べた. しかし, それでは議論が困難になるので, その対処法について述べる. それは, $U \supseteq V$ として, 次元の高い方の単位系 U において, 正規化された変数を導入し, 部分単位系を構成し, 次元の低い単位系 V に次元を揃えるものである.

ここでは簡単のために, $L = N - M = 1$ の場合を考えるが, 結果を一般化するのはむずかしくない. また, 行列 T の左の $M \times M$ の部分は先のいくつかの例に見られるように, 単位行列になっているものとする. (そうなっていない場合は基本単位の取り替え, すなわち基底変換で単位行列になるようにできる.)

$\tilde{\boldsymbol{d}} \in \operatorname{Ker} T$ を $\tilde{d}_N = -1$ となるように選ぶ. そして, 量 N の U における表現を

$$N_U = n_U u_1^{\tilde{d}_1} \cdots u_{N-1}^{\tilde{d}_{N-1}} u_N^{-1}, \quad n_U = k_1^{-\tilde{d}_1} \cdots k_{N-1}^{-\tilde{d}_{N-1}} \tag{24}$$

とする．すると, V において対応する表現は $N_V = 1$ (無次元) になる．

U における任意の量の表現 $Q_U = q_U u_1^{d_1} \cdots u_N^{d_N}$ に対して, 同じく U における量の表現 $\hat{Q}_U = N_U^{d_N} Q_U$ を定義する．これを正規化された量とよぶことにする．具体的には,

$$\hat{Q}_U = n_U^{d_N} q_U u_1^{d_1+\tilde{d}_1} \cdots u_{N-1}^{d_{N-1}+\tilde{d}_{N-1}} \tag{25}$$

であり, 単位 u_N を含まない．つまり, 次元低下に伴う同一視の自由度を用いて, u_N が表れないようにしたのである．

この正規化によって, U の全ての量は $(N-1)$-元単位系 $\hat{U} = \{u_1, \ldots, u_{N-1}\}$ の量であると見なすことができる．$(N-1)$-元単位系 V における Q_V と $\hat{Q}_U = Q_{\hat{U}}$ の間には 1 対 1 の関係がある．したがって, 基本的には単位系 U を土俵として, その部分単位系 $\hat{U}$ を V と同一視することで, 議論をスムーズに行うことができる．